с потоком энтропии переносимого частицами газа, а с другой стороны, — процессами молекулярных соударений, которые характеризуются правой частью (19,1). Проинтегрируем (19,1) по всему объему V замкнутой системы.

Тогда получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{k}{4}\int \ln\left(\frac{f_2 f_3}{f f_1}\right)\cdot(f_2 f_3 - f f_1)\,\sigma v_{\text{отн}}\,d\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v}_1\,d\Omega\,dV, \tag{19,2}$$

где S — полная энтропия системы $S=\int s\,dV$. Интеграл

$$\int \frac{\partial j_k^{(S)}}{\partial x_k}dV=\oint j_k\,dS_k=0,$$

поскольку поток на границе замкнутой системы равен нулю.

Нетрудно заметить, что подынтегральная функция в (19,2) является существенно положительной. Действительно,

$$\ln\left(\frac{f_2 f_3}{f f_1}\right)[f_2 f_3 - f f_1]\geqslant 0. \tag{19,3}$$

Если $f_2 f_3 > f f_1$, то как логарифм, так и квадратная скобка имеют положительный знак; если $f_2 f_3 < f f_1$, то оба они отрицательны. При $f_3 f_2 = f f_1$ подынтегральная функция обращается в нуль. Поскольку интеграл от существенно положительной функции также положителен, мы видим, что в замкнутой системе

$$\frac{\partial S}{\partial t}\geqslant 0. \tag{19,4}$$

Таким образом, доказано, что энтропия замкнутой системы — идеального одноатомного газа, монотонно возрастает во времени или постоянна. Мы видим, что кинетическая теория устанавливает характер и детализирует механизм роста энтропии, связывая его с межмолекулярными столкновениями.

§ 20. Равновесное и локально равновесное распределение в идеальном газе

При возрастании энтропии она стремится к некоторому пределу, так что

$$\frac{\partial S}{\partial t}=0 \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{20,1}$$

В действительности энтропия достигает своего максимального значения не при $t\to\infty$, но по прошествии некоторого времени релаксации τ.

Вычисление времени релаксации представляет очень сложную задачу. Ниже мы найдем приближенное значение времени релаксации.

Ясно, что для выполнения равенства (20,1) при $t > \tau$ в формуле (19,3) должен стоять знак равенства, т. е.

$$f_2 f_3 = f f_1. \tag{20,2}$$

Формула (20,2) показывает, что $\ln f$ является аддитивным интегралом движения. При столкновениях двух частиц существует пять и только пять аддитивных интегралов движения [1]): интегралы массы, импульса и энергии.

Поэтому $\ln f$ должна быть линейной функцией этих величин:

$$\ln f = am + b_i m v_i + c\,\frac{m v_k^2}{2}. \tag{20,3}$$

Заметим, что решение функционального уравнения (20,2), приведенное в статистической физике, было основано на допущении о том, что $f \equiv f(v^2)$. Приводимый здесь вывод свободен от этого допущения.

Постоянные a, b_i и c могут быть выражены через число частиц N в 1 *см*^{3}, среднюю макроскопическую скорость u_i и среднюю энергию одноатомного газа в состоянии равновесия. В частности, если газ как целое покоится и $u_i = 0$, то

$$\int f\,d\boldsymbol{v} = N, \tag{20,4}$$

$$\int v_i f\,d\boldsymbol{v} = 0, \tag{20,5}$$

$$N \int \frac{m v_k^2}{2} f\,d\boldsymbol{v} = \frac{3}{2} NkT. \tag{20,6}$$

Отсюда находим равновесное распределение Максвелла

$$f^{(M)} = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \tag{20,7}$$

В равновесном газе температура T и плотность N имеют постоянное значение во всем объеме газа и в нем не происходит макроскопического движения.

Если, однако, температура и плотность зависят от координат и времени и газ совершает движение со средней скоростью u_i, то интеграл столкновений уравнения Больцмана обращается

---

[1]) См., например, А. Зоммерфельд, Термодинамика и статистическая физика, М., ИЛ, 1955. В более общем случае задачи трех тел имеется восемь аддитивных интегралов — энергии, импульса, момента импульса и массы — см. Уиттекер, Аналитическая механика, Гостехиздат, М., 1937. По-видимому, последняя теорема имеет совершенно общий характер.

в нуль, если положить

$$f^{(0)} = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m(v-u)^2}{2kT}}, \tag{20,8}$$

где N и T являются функциями координат и времени. Положим для краткости

$$f^{(0)} = e^{\alpha+\beta_i v_i+\gamma v^2}, \tag{20,9}$$

$$\alpha = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mu^2}{2kT}}, \tag{20,10}$$

$$\beta_i = \frac{mu_i}{kT}, \tag{20,11}$$

$$\gamma = \frac{m}{2kT}. \tag{20,12}$$

Распределение $f^{(0)}$ представляет собой решение уравнения Больцмана, если оно обращает в нуль не только правую, но и левую часть этого уравнения. Для этого α, β_i и γ должны удовлетворять условиям, сформулированным ниже.

Распределение (20,8) или (20,9) носит название локального максвелловского распределения. Подставляя (20,9) в уравнение Больцмана, и учитывая, что равенство нулю его левой части должно выполняться при любых значениях v_i, приравниваем нулю в отдельности коэффициенты при разных степенях v_i. Тогда получаем систему уравнений

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{F_i\beta_i}{m} = 0, \tag{20,13}$$

$$\frac{\partial\beta_i}{\partial t} + 2\gamma\frac{F_i}{m} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} = 0, \tag{20,14}$$

$$\delta_{ij}\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\beta_j}{\partial x_i}\right) = 0, \tag{20,15}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x_i} = 0. \tag{20,16}$$

Таким образом, уравнения (20,13)—(20,16) накладывают ограничение на среднюю скорость движения u_i, совместимую с локальным максвелловским распределением. Формула (20,16) показывает, что температура газа T должна быть постоянной в пространстве. Однако температура газа как целого может изменяться по времени.

Дифференцируя (20,15) по координатам и учитывая (20,16), имеем

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\,\partial x_l} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l\,\partial x_k} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial x_k \, \partial x_l} = 0. \tag{20,17}$$

Решением уравнения (20,17) служит

$$\left.\begin{aligned} &u_i = a_i(t) + b_{ij}(t)\, x_j \\ \text{или} \quad &u_i = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20,18}$$

Коэффициенты b_{ij} можно найти, подставляя (20,18) в (20,15). Тогда получим

$$b_{ij} = -b_{ji}, \qquad b_{ii} = \frac{m}{2kT^2}\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Поэтому окончательно

$$u_i = a_i(t) + b_{lk} e_{lkj} x_l + \frac{m}{2kT^2}\frac{\partial T}{\partial t} x_i$$

или, в векторной форме,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}(t) + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}] + \frac{m}{2kT^2}\frac{\partial T}{\partial t}\boldsymbol{r}. \tag{20,19}$$

Таким образом, с локальным максвелловским распределением совместимо произвольное поступательное и вращательное (с угловой скоростью ω) движение газа как целого и радиальное движение, скорость которого определяется последним слагаемым в (20,19).

Не использованное нами условие (20,14) содержит силы, вид которых накладывает определенные связи на коэффициенты a_i и b_{ij}. Если газ заключен в неподвижный сосуд с непроницаемыми стенками, то стационарное движение типа (20,19) в нем невозможно. Это значит, что в (20,18) приходится выбирать $u_i = 0$. Полагая в (20,14) $\beta_i = 0$, находим

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} + 2\gamma \frac{F_i}{m} = 0.$$

Если внешние силы имеют потенциал, то $F_i = -\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$ и для α мы имеем

$$\alpha = -\frac{U}{kT} + \text{const}.$$

Тогда нормированное равновесное распределение приобретает вид

$$f^{(\text{М}-\text{Б})} = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} e^{-\frac{U}{kT}}. \tag{20,20}$$

Таким образом, мы пришли к естественному результату: в газе устанавливается равновесное распределение Максвелла — Больцмана (20,6), а не локальное максвелловское распределение (20,8).

Установление равновесного распределения Максвелла — Больцмана связано с установлением распределения по скоростям и в пространстве. Время релаксации для процесса в пространстве скоростей имеет порядок величины $\tau \sim \frac{\lambda}{\bar{v}}$, где λ — длина свободного пробега. Пусть в начальный момент времени $t=0$ задано произвольное распределение частиц в пространстве $\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$. За время порядка τ в каждой точке пространства распределение молекул по скоростям приближается к локально максвелловскому, так что

$$\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \to f^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t).$$

При этом плотность газа N и его температура T еще не успевают принять равновесных значений во всем газе, а макроскопическое движение его частей (если оно имело место в начальный момент) не успевает затухнуть. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы помимо аргумента $\boldsymbol{v}$ выписали в $f^{(0)}$ параметры $\boldsymbol{r}$ и t. Изменение во времени переменных N, T и $\boldsymbol{u}$ описывается макроскопическими переменными и характеризуется макроскопическим временем τ_{macro}. Это время релаксации τ_{macro} порядка $\frac{L}{c}$, где L — размер макроскопической системы, а c — скорость распространения возмущений в газе. Как будет показано в § 26, это не что иное, как скорость звука. Таким образом,

$$f^{(0)} \to f^{(\text{М}-\text{Б})} \quad \text{при} \quad t \approx \tau_{\text{macro}}.$$

Следует подчеркнуть, что, в отличие от распределения Максвелла — Больцмана, локальное распределение Максвелла никогда не является точным, а лишь приближенно описывает распределение по скоростям в ограниченном объеме газа.

Оно является точным решением уравнения Больцмана только для скорости, даваемой формулой (20,19), и плотности удовлетворяющей уравнению (20,14). Для других значений $\boldsymbol{u}$, T и $N(\boldsymbol{r})$, $f^{(0)}$ представляет приближенное решение уравнения Больцмана (см. следующий параграф), справедливое за промежутки времени τ, в течение которых макроскопические величины $\boldsymbol{u}$, T и N не успевают изменяться, и их можно считать просто константами.

§ 21. Общая теория решения уравнения Больцмана

Полученные в §17—19 результаты не были связаны с получением явных решений уравнения Больцмана. Как мы подчеркивали, решение уравнения Больцмана сталкивается с очень большими трудностями, как математического, так и физического