

мана (20,6), а не локальное максвелловское распределение (20,8).

Установление равновесного распределения Максвелла — Больцмана связано с установлением распределения по скоростям и в пространстве. Время релаксации для процесса в пространстве скоростей имеет порядок величины $\tau \sim \frac{\lambda}{\bar{v}}$, где λ — длина свободного пробега. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ задано произвольное распределение частиц в пространстве $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. За время порядка τ в каждой точке пространства распределение молекул по скоростям приближается к локально максвелловскому, так что

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rightarrow f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).$$

При этом плотность газа N и его температура T еще не успевают принять равновесных значений во всем газе, а макроскопическое движение его частей (если оно имело место в начальный момент) не успевает затухнуть. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы помимо аргумента \mathbf{v} выписали в $f^{(0)}$ параметры \mathbf{r} и t . Изменение во времени переменных N , T и \mathbf{u} описывается макроскопическими переменными и характеризуется макроскопическим временем τ_{macro} . Это время релаксации τ_{macro} порядка $\frac{L}{c}$, где L — размер макроскопической системы, а c — скорость распространения возмущений в газе. Как будет показано в § 26, это не что иное, как скорость звука. Таким образом,

$$f^{(0)} \rightarrow f^{(M-B)} \quad \text{при} \quad t \approx \tau_{\text{macro}}.$$

Следует подчеркнуть, что, в отличие от распределения Максвелла — Больцмана, локальное распределение Максвелла никогда не является точным, а лишь приближенно описывает распределение по скоростям в ограниченном объеме газа.

Оно является точным решением уравнения Больцмана только для скорости, даваемой формулой (20,19), и плотности удовлетворяющей уравнению (20,14). Для других значений \mathbf{u} , T и $N(\mathbf{r})$, $f^{(0)}$ представляет приближенное решение уравнения Больцмана (см. следующий параграф), справедливое за промежутки времени τ , в течение которых макроскопические величины \mathbf{u} , T и N не успевают изменяться, и их можно считать просто константами.

§ 21. Общая теория решения уравнения Больцмана

Полученные в §17—19 результаты не были связаны с получением явных решений уравнения Больцмана. Как мы подчеркивали, решение уравнения Больцмана сталкивается с очень большими трудностями, как математического, так и физического

характера. Последние связаны с тем, что фактически вид функции $\sigma(v^{\text{отн}}, \alpha)$ для молекулярных столкновений неизвестен и поэтому сама задача интегрирования уравнения Больцмана является несколько неопределенной. На практике всегда рассматриваются некоторые упрощенные модели, для которых межмолекулярное взаимодействие может быть представлено тем или иным достаточно простым законом в зависимости от расстояния между частицами.

Наиболее простыми и часто рассматриваемыми моделями являются модели частиц твердых шариков или частиц, взаимодействующих по закону типа $\frac{1}{r^n}$. Эти законы взаимодействия в достаточной мере произвольны и их выбор определяется главным образом простотой соответствующих формул для сечения рассеяния. Использование этих моделей отвечает переходу от реальной газовой системы к некоторой модельной системе. Однако и для модельной газовой системы решение уравнения Больцмана все еще сопряжено с преодолением расчетных трудностей. В настоящее время разработан ряд методов его решения. Мы остановимся лишь на важнейших из них.

Самым эффективным методом получения общего решения уравнения Больцмана является метод моментов.

Под моментами понимают функции вида

$$M^{(0)} = \int f \, dv, \quad (21,1)$$

$$M_i^{(1)} = \int v_i f \, dv, \quad (21,2)$$

$$M_{ij}^{(2)} = \int v_i v_j f \, dv, \quad (21,3)$$

$$M_{ijk}^{(3)} = \int v_i v_j v_k f \, dv, \quad (21,4)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$M_{i\dots}^{(N)} = \int v_i \dots v_N f \, dv. \quad (21,5)$$

Моментами являются такие важные величины, как плотность, средняя скорость частиц, потоки импульса и энергии, например,

$$\rho = NmM^{(0)}, \quad (21,6)$$

$$u_i = \int v_i f \, dv = M_i^{(1)}, \quad (21,7)$$

$$j_i = m \int (v_i - u_i) f \, dv = m(M_i^{(1)} - u_i M^{(0)}), \quad (21,8)$$

$$\sigma_{ik} = mN(M_{ij}^{(2)} - u_i u_k M^{(0)}), \quad (21,9)$$

$$q_i = \frac{mN}{2} \int v_i v^2 f \, dv = \frac{mN}{2} M_{ijj}^{(3)}. \quad (21,10)$$

Идея метода моментов заключается в следующем: представим решение уравнения Больцмана в виде ряда по ортогональным полиномам. В качестве таких полиномов естественно выбрать полиномы Эрмита — Сонина (§ 10 ч. V), которые удобно записать в виде

$$H_{ijkl}^{(m)} \dots = \frac{(-1)^N}{f^{(0)}} \frac{\partial^m f^{(0)}}{\partial v_i \partial v_j \dots}. \quad (21,11)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} H^{(0)} &= 1, \\ H_i^{(1)} &= \left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2} v_i, \\ H_{ik}^{(2)} &= \left(\frac{m}{kT}\right) v_i v_k - \delta_{ik}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Полиномы Эрмита — Сонина ортогональны с весом $f^{(0)}$:

$$\int f^{(0)} H^{(m)} H^{(m')} dv = 0 \quad \text{при } m \neq m'.$$

Представим функцию распределения в виде ряда

$$f = f^{(0)} (1 + c_i^{(1)} H_i^{(1)} + c_{ik}^{(2)} H_{ik}^{(2)} + \dots) \quad (21,12)$$

с коэффициентами $c_i^{(1)}, \dots, c_{ik}^{(2)}$, зависящими от координат и времени. Простое вычисление показывает, что коэффициенты этого ряда выражаются через моменты. Используя ортогональность полиномов Эрмита, легко найти, что

$$c_i^{(1)} = \frac{u_i}{\sqrt{\frac{kT}{m}}}; \quad c_{ik}^{(2)} = \frac{\sigma_{ik}}{NkT}; \quad \dots \quad (21,13)$$

Умножая уравнение Больцмана на полиномы Эрмита $H^{(m)}$ и интегрируя его по скоростям, имеем (в отсутствии внешних сил):

$$\int H_{ijk}^{(m)} \dots \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) dv = \int H_{ijk}^{(m)} \dots I dv. \quad (21,14)$$

Подставляя затем в (21,14) разложение (21,12) и пользуясь условиями ортогональности, приходим к уравнению для коэффициентов $c_{ij}^{(m)} \dots$. Поскольку коэффициенты $c_{ij}^{(m)} \dots$ могут быть выражены через моменты $M_{ij}^{(m)} \dots$, то эту систему можно представить в виде бесконечной системы дифференциальных уравнений. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial M_{ijk}^{(m)} \dots}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} M_{ijk}^{(m)} \dots = \int v_i v_j v_k \dots I dv. \quad (21,15)$$

Для специальной модели взаимодействия, когда взаимодействие между молекулами аппроксимируется силами отталкивания, обратно пропорциональными пятой степени рассеяния (так называемые максвелловские молекулы), бесконечный ряд обрывается и сводится к конечному числу уравнений. Однако для более реалистических моделей такого упрощения не возникает. Тем не менее важность метода моментов заключается в том, что он, в принципе, позволяет найти замкнутую систему уравнений относительно макроскопических величин (моментов), эквивалентную уравнению Больцмана. Точное решение этой системы было бы равноценно точному решению уравнения Больцмана. Для реальных расчетов функцию распределения приходится аппроксимировать конечным числом членов в разложении (21,12).

Чаще всего ограничиваются членами третьего порядка. При этом удобнее всего ограничиться теми моментами, которые имеют непосредственный смысл. Такими являются первые тринадцать моментов $-M^{(0)}, M_i^{(1)}, M_{ik}^{(2)}, M_{ikj}^{(3)}$, через которые выражаются плотность, поток импульса и энергии. В этом так называемом тринадцатимоментном приближении функция распределения имеет вид

$$f = f_0 \left[\left(1 + \frac{\sigma_{ik}}{2N} \frac{v_i v_k}{(kT)^2} - \frac{q_k v_k}{mN} \left(\frac{m}{kT} \right)^2 \left(1 - \frac{mv^2}{5kT} \right) \right) \right]. \quad (21,16)$$

Таким образом, в разложение (21,16) входят коэффициенты σ_{ik} и q_k , зависящие, вообще говоря, от координат и времени.

Подставляя приближенное значение f по формуле (21,16) в (21,14), можно прийти к системе уравнений для этих коэффициентов. Достоинством этой системы является то, что неизвестные коэффициенты являются непосредственно измеряемыми величинами.

Для повышения степени точности можно увеличить число членов ряда, которые удерживаются в аппроксимирующей функции распределения f (выражении¹⁾). Мы не можем останавливаться на этих громоздких вычислениях, тем более, что все они относятся к не обоснованным моделям газам с произвольно задаваемым сечением рассеяния $\sigma(v_{\text{отн}}; \alpha)$.

Уравнение Больцмана допускает существенное упрощение в двух важных случаях:

1) если мы интересуемся изменениями состояния газа за промежутки времени $\Delta t > \tau_{\text{micro}}$;

2) если газ как целое находится в состоянии, близком к равновесному.

В первом случае можно считать, что в каждой точке газа за время $t < \Delta t$ установилось распределение по скоростям, близ-

¹⁾ М. К о г а н, Динамика разреженного газа, «Наука», 1967.

кое к локально максвелловскому распределению $f^{(0)}$. Тогда для времен $t > \Delta t$ можно пытаться искать решение уравнения Больцмана в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \simeq f^{(0)}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)[1 + \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)], \quad (21,17)$$

где $\varphi f^{(0)}$ — малое изменение функции $f^{(0)}$, т. е. $\varphi \ll 1$.

Функция φ описывает эволюцию газа за времена, большие по сравнению с τ_{micro} . Этот метод (носящий название метода Чэпмена — Энскога) позволяет описывать макроскопическое поведение газа, например, вычислить потоки импульса или тепла в газе.

Если газ находится в состоянии, близком к равновесному, то можно положить

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cong f^{(M)}(\mathbf{v})[1 + \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)], \quad (21,18)$$

где $f^{(M)}(\mathbf{v})$ — равновесное максвелловское распределение и $\varphi \ll 1$. Подобная аппроксимация имеет смысл, если к первоначально равновесному газу прикладываются малые возмущения.

В этом параграфе мы ограничимся изложением общей теории. Примеры применения общей теории будут даны ниже.

В обоих случаях уравнение Больцмана линеаризуется. Мы начнем с первого случая.

При подстановке (21,17) в уравнение Больцмана следует сохранить только величины первого порядка малости. При этом скорость v_i и силы F_i , вызывающие отклонение от равновесного локального распределения, следует считать малыми величинами первого порядка. Поэтому подстановка (21,17) в левую часть уравнения Больцмана дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_k \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{F_k}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_k}. \quad (21,19)$$

В операторе столкновений можно написать

$$\begin{aligned} [f_2 f_3 - f f_1] &\simeq f_2^{(0)} f_3^{(0)} (1 + \varphi_2 + \varphi_3) - f^{(0)} f_1^{(0)} (1 + \varphi + \varphi_1) \simeq \\ &\simeq f^{(0)} f_1^{(0)} (\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi - \varphi_1). \end{aligned} \quad (21,20)$$

Поэтому окончательно приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_k \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{F_k}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_k} = \\ = f^{(0)} \int \sigma v_{\text{отн}} f_1^{(0)} (\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi) d\mathbf{v}_1 d\Omega. \end{aligned} \quad (21,21)$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным интегро-дифференциальным уравнением относительно функции $\varphi(x_k, v_k, t)$.

В § 22 будет проведено решение уравнения (21,21). Здесь мы укажем лишь на важное свойство неоднородного интегрального уравнения (21,21).

Запишем его в сокращенном операторном виде

$$\hat{L}\varphi = A, \quad (21,22)$$

где A — известная функция и L — линейный самосопряженный интегральный оператор.

Для того чтобы не писать громоздких формул, мы запишем $\hat{L}\varphi$ в символическом виде

$$\hat{L}\varphi = \int \omega(v, v_1) (\varphi_1 - \varphi) dv_1, \quad (21,23)$$

причем

$$\omega(v, v_1) = \omega(v_1, v).$$

Умножая (21,23) на произвольную функцию $\psi(v)$ и интегрируя по dv , находим

$$\int \psi(v) \hat{L}\varphi(v) dv = \int \psi(v) \omega(v, v_1) [\varphi_1(v_1) - \varphi(v)] dv dv_1. \quad (21,24)$$

Кроме того, можно написать

$$\begin{aligned} \int \psi(v_1) \hat{L}\varphi(v) dv_1 &= \int \psi(v_1) \omega(v_1, v) [\varphi(v) - \varphi_1(v_1)] dv dv_1 = \\ &= - \int \psi(v) \omega(v, v_1) [\varphi_1(v_1) - \varphi(v)] dv dv_1. \end{aligned} \quad (21,25)$$

Сравнивая (21,24) и (21,25), перепишем (21,24) в симметричном виде

$$\int \psi \hat{L}\varphi dv = \frac{1}{2} \int (\varphi - \varphi_1) (\psi - \psi_1) \omega dv_1 dv. \quad (21,26)$$

Поменяв местами φ и ψ , находим

$$\int \psi \hat{L}\varphi dv = \int \varphi \hat{L}\psi dv. \quad (21,27)$$

Таким образом, \hat{L} является самосопряженным оператором. В частном случае, когда $\psi = \varphi$, (21,26) дает

$$\int \varphi \hat{L}\varphi dv = \frac{1}{2} \int (\varphi - \varphi_1)^2 \omega dv dv_1 \geq 0, \quad (21,28)$$

поскольку всегда $\omega(v, v_1) \geq 0$.

Рассмотрим две функции — функцию φ , удовлетворяющую уравнению (21,23) и одновременно уравнению

$$\int \varphi \hat{L}\varphi dv = \int \varphi A dv \quad (21,29)$$

и функцию ψ , удовлетворяющую только интегральному соотношению

$$\int \psi \hat{L} \psi \, dv = \int \psi A \psi \, dv, \quad (21,30)$$

но не являющуюся решением уравнения (21,23).

Тогда легко показать, что имеет место неравенство

$$\int \varphi \hat{L} \varphi \, dv \geq \int \psi \hat{L} \psi \, dv. \quad (21,31)$$

Это неравенство означает, что решение линеаризованного интегрального уравнения Больцмана отвечает максимуму интеграла $\int \varphi \hat{L} \varphi \, dv$ по сравнению со всеми функциями удовлетворяющими условию (21,30).

Для доказательства (21,31) напомним положительную [в силу (21,28)] величину

$$\begin{aligned} \int (\varphi - \psi) \hat{L} (\varphi - \psi) \, dv &= \int \varphi \hat{L} \varphi \, dv + \int \psi \hat{L} \psi \, dv - \int \varphi \hat{L} \psi \, dv - \\ &- \int \psi \hat{L} \varphi \, dv = \int \varphi \hat{L} \varphi \, dv + \int \psi \hat{L} \psi \, dv - 2 \int \psi \hat{L} \varphi \, dv \geq 0, \end{aligned}$$

где мы воспользовались (21,27).

Пользуясь (21,22) и (21,30), находим

$$\int (\varphi - \psi) \hat{L} (\varphi - \psi) \, dv = \int \varphi \hat{L} \varphi \, dv - \int \varphi \hat{L} \psi \, dv \geq 0.$$

Отсюда следует доказываемое нами неравенство (21,31).

Экстремальные свойства решений интегрального уравнения (21,21) позволяют для их нахождения применить обычные методы вариационного исчисления, выбирая φ в виде линейной комбинации известных функций g_i :

$$\varphi = \sum \alpha_i g_i.$$

Подбирая их коэффициенты так, чтобы φ имело максимальное значение, можно найти функцию, достаточно близкую к истинному решению.

Второй случай линеаризации уравнения Больцмана получается при подстановке (21,18). Поскольку максвелловское распределение автоматически удовлетворяет уравнению Больцмана, сразу получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{F_k}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} = \int \sigma v_{отн} f^M(v_1) [\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi - \varphi_1] \, dv_1 \, d\Omega. \quad (21,32)$$

Мы приходим к однородному линейному интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \hat{L} \varphi. \quad (21,32')$$

Его решение может быть легко найдено, если известно решение однородного интегрального уравнения

$$\hat{L} \varphi_i^{(0)} = \lambda_i \varphi_i^{(0)}, \quad (21,33)$$

где λ_i — собственные значения и $\varphi_i^{(0)}$ — собственные (ортогональные и нормированные) функции оператора \hat{L} .

Решение (21,32) может быть представлено в виде разложения по системе функций

$$\varphi = \sum \alpha_i \varphi_i^{(0)}. \quad (21,34)$$

При этом предполагается, что спектр функций $\varphi_i^{(0)}$ имеет дискретный характер. Пример использования этого метода будет дан в § 25 и 26.

Заметим лишь, что первые пять собственных значений уравнения (21,33) могут быть указаны сразу.

Именно, поскольку функции

$$\varphi = 1, \quad \varphi = v, \quad \varphi = \frac{mv^2}{2}$$

обращают в нуль оператор столкновений и не зависят от x_i явно, они являются собственными функциями уравнения (21,33), которые отвечают собственным значениям оператора \hat{L} .

§ 22. Уравнения гидродинамики, вязкость и теплопроводность газов

Мы видели, что кинетическое уравнение Больцмана позволяет получить, как следствие, законы механики сплошных сред. Однако фактическое нахождение тензора напряжений σ_{ik} требует значения функции распределения f .

Мы перейдем к вычислению неравновесной функции распределения в идеальном газе, совершающем макроскопическое движение.

Мы будем предполагать, что скорость макроскопического движения газа u изменяется от точки к точке. Примем, однако, что это изменение является достаточно медленным. Под медленным пространственным изменением скорости u мы понимаем следующее: объемы газа с пространственной протяженностью порядка нескольких длин свободного пробега можно считать движущимися с общей постоянной скоростью. При этом, как