Мы приходим к однородному линейному интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \hat{L}\varphi. \qquad (21{,}32')$$

Его решение может быть легко найдено, если известно решение однородного интегрального уравнения

$$\hat{L}\varphi_i^{(0)} = \lambda_i \varphi_i^{(0)}, \qquad (21{,}33)$$

где λ_i — собственные значения и $\varphi_i^{(0)}$ — собственные (ортогональные и нормированные) функции оператора $\hat{L}$.

Решение (21,32) может быть представлено в виде разложения по системе функций

$$\varphi = \sum \alpha_i \varphi_i^{(0)}. \qquad (21{,}34)$$

При этом предполагается, что спектр функций $\varphi_i^{(0)}$ имеет дискретный характер. Пример использования этого метода будет дан в § 25 и 26.

Заметим лишь, что первые пять собственных значений уравнения (21,33) могут быть указаны сразу.

Именно, поскольку функции

$$\varphi = 1, \qquad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{v}, \qquad \varphi = \frac{mv^2}{2}$$

обращают в нуль оператор столкновений и не зависят от x_i явно, они являются собственными функциями уравнения (21,33), которые отвечают собственным значениям оператора $\hat{L}$.

§ 22. Уравнения гидродинамики, вязкость и теплопроводность газов

Мы видели, что кинетическое уравнение Больцмана позволяет получить, как следствие, законы механики сплошных сред. Однако фактическое нахождение тензора напряжений σ_{ik} требует значения функции распределения f.

Мы перейдем к вычислению неравновесной функции распределения в идеальном газе, совершающем макроскопическое движение.

Мы будем предполагать, что скорость макроскопического движения газа $\boldsymbol{u}$ изменяется от точки к точке. Примем, однако, что это изменение является достаточно медленным. Под медленным пространственным изменением скорости $\boldsymbol{u}$ мы понимаем следующее: объемы газа с пространственной протяженностью порядка нескольких длин свободного пробега можно считать движущимися с общей постоянной скоростью. При этом, как это было сказано в § 20, в таких объемах устанавливается локальное максвелловское распределение. Скорости движения разных объемов газа являются различными, так что $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$.

Мы ограничимся изотермическим режимом движения газа, так что температура во всем объеме газа является постоянной. Считая локальное равновесие установившимся, подставим в выражение для тензора напряжений σ_{ik} и потока тепла q_k значение $f^{(0)}$.

Формула (18,12) дает

$$\sigma_{ik} = mN \int (v_i - u_i)(v_k - u_k) f^{(0)}\, dv =$$
$$= \rho\, \overline{(v_i - u_i)(v_k - u_k)} = NkT\delta_{ik} = p\delta_{ik}. \qquad (22,1)$$

Таким образом, тензор напряжений сводится к нормальному давлению. Аналогично, из (18,17) находим $q_k = 0$. В этом приближении уравнения (18,9) и (18,14) сплошной среды приобретают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) = 0, \qquad (22,2)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_k}. \qquad (22,3)$$

Уравнение (22,3) носит название уравнения Эйлера. Как известно, (22,3) является уравнением движения идеальной жидкости.

Уравнение для энтропии единицы объема (19,1) запишется в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial j_k^s}{\partial x_k} = 0. \qquad (22,4)$$

Последнее уравнение показывает, что при движении жидкости ее удельная энтропия остается постоянной, т. е. процесс перемещения имеет адиабатический характер.

В этом приближении сплошную среду можно рассматривать как идеальную жидкость с уравнением состояния

$$p = NkT. \qquad (22,5)$$

Совокупность уравнений (22,2)—(22,5) полностью определяет движение газа в приближении сплошной среды. Для получения уравнений гидродинамики реального (вязкого) газа в том же приближении, будем пытаться искать решение уравнения Больцмана по методу последовательных приближений Чэпмена — Энскога. Именно, положим,

$$f = f^{(0)}(1 + \varphi), \qquad (22,6)$$

где $\varphi \ll 1$, и $f^{(0)}$ — локально равновесное распределение.

Для краткости выкладок будем считать газ изотермическим и несжимаемым, внешние силы отсутствующими и давление постоянным [1]).

Средняя скорость u_i газа может зависеть как от координат, так и от времени. Подставляя (22,6) в уравнение Больцмана и ограничиваясь величинами первого порядка малости, находим

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}+v_k\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_k}=f^{(0)}I(\varphi), \tag{22,7}$$

где

$$I(\varphi)=\int f_1^{(0)}v_{\text{отн}}\sigma\left[\varphi_2+\varphi_3-\varphi-\varphi_1\right]d\boldsymbol{v}_1\,d\Omega. \tag{22,8}$$

В левой части мы опустили члены, пропорциональные φ, поскольку производные от $f^{(0)}$ сами по себе являются величинами первого порядка малости.

Вычислим производные в левой части (22,7), пользуясь выражением (20,8) для $f^{(0)}$. Поскольку N и T — постоянные величины, имеем

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}+v_k\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_k}=\frac{m}{kT}(v_i-u_i)f^{(0)}\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{m}{kT}(v_i-u_i)f^{(0)}v_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Для $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ можно воспользоваться приближением идеальной жидкости, т. е. в силу (22,3) написать

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=-u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Поэтому окончательно

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}+v_k\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_k}=\frac{m}{kT}(v_i-u_i)(v_k-u_k)f^{(0)}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \tag{22,9}$$

В несжимаемой жидкости $\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0$ и можно вместо (22,9) написать

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}+v_k\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_k}=\frac{m}{kT}\left(V_iV_k-\frac{V^2\delta_{ik}}{3}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)f^{(0)}. \tag{22,10}$$

Обозначим через U_{ik} тензор скорости деформаций:

$$U_{ik}=\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}.$$

[1]) Этому отвечает, например, движение газа между двумя плоскостями, движущейся и неподвижной.

Тогда уравнение Больцмана приобретает вид

$$\frac{m}{kT}\left(V_i V_k - \frac{V^2\delta_{ik}}{3}\right) U_{ik} f^{(0)} = f^{(0)} \int f_1^{(0)} v_{\text{отн}} \sigma \left[\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi\right] d\boldsymbol{v}_1\, d\boldsymbol{\Omega}. \tag{22,11}$$

Функция $\varphi(v)$ помимо уравнения (22,11) должна удовлетворять дополнительным условиям, выражающим постоянство числа частиц, импульса и энергии газа как целого:

$$\int f\, d\boldsymbol{v} = \int f^{(0)}\, d\boldsymbol{v} = N,$$

$$mN \int f \boldsymbol{V}\, d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P} = Nm \int f^{(0)} \boldsymbol{V}\, d\boldsymbol{v} = \text{const},$$

$$E = \frac{mN}{2} \int f V^2\, d\boldsymbol{v} = \frac{mN}{2} \int f^{(0)} V^2\, d\boldsymbol{v} = \text{const}.$$

Отсюда следуют равенства

$$\int f^{(0)} \varphi\, d\boldsymbol{v} = 0, \tag{22,12}$$

$$Nm \int f^{(0)} V_i \varphi\, d\boldsymbol{v} = 0, \tag{22,13}$$

$$\frac{mN}{2} \int f^{(0)} V^2 \varphi\, d\boldsymbol{v} = 0. \tag{22,14}$$

Нетрудно заметить, что выполнение этих пяти уравнений является необходимым условием существования решений неоднородного интегрального уравнения (22,11).

Действительно, если однородное интегральное уравнение $I(\varphi) = 0$ имеет решение $\varphi = \chi(\boldsymbol{v})$, то неоднородное уравнение

$$I(\varphi) = A\varphi \tag{22,15}$$

имеет решение только при выполнении условий ортогональности

$$\int \chi(\boldsymbol{v})\, \varphi\, d\boldsymbol{v} = 0. \tag{22,16}$$

Решениями однородного интегрального уравнения служат, например, функции

$$\chi_1 = e^{-\alpha V^2}; \qquad \chi_2 = \boldsymbol{V} e^{-\alpha V^2}; \qquad \chi_3 = V^2 e^{-\alpha V^2}.$$

Ясно, что соотношения (22,12)—(22,14) выражают необходимые условия ортогональности.

Из структуры интегрального уравнения (22,11) видно, что его решение нужно пытаться искать в виде

$$\varphi = \psi_{ik}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = \psi_{ik} U_{ik}. \tag{22,17}$$

При подстановке (22,17) в (22,11) величина U_{ik} в обеих частях уравнения сократится. Это значит, что решение (22,17) справедливо при всех значениях тензора скорости деформаций, как это и должно быть.

При этом тензор ψ_{ik} является симметричным. Можно также считать, что всегда $\psi_{ii}=0$, поскольку при $i=k$ всегда $U_{ii}=0$ и $\varphi=0$. Подставляя (22,17) в (22,11), находим

$$\frac{m}{kT}\left(V_iV_k-\frac{V^2\delta_{ik}}{3}\right)=\int f_1^{(0)}\sigma v_{\text{отн}}\left[\psi_{ik}^{(2)}+\psi_{ik}^{(3)}-\psi_{ik}^{(1)}-\psi_{ik}\right]d\boldsymbol{v}_1\,d\boldsymbol{\Omega}. \quad (22,18)$$

В этом уравнении левая часть не зависит от средней скорости, следовательно, функция ψ_{ik} зависит только от компонент относительной скорости V_i.

Очевидно, что при изменении тензора $\left(V_iV_k-\frac{V^2\delta_{ik}}{3}\right)$, например, при вращении в пространстве скоростей, уравнение (22,18) не должно нарушаться. Отсюда следует, что для ψ_{ik} следует написать выражение

$$\psi_{ik}=a(V)\left(V_iV_k-\frac{V^2}{3}\delta_{ik}\right), \quad (22,19)$$

удовлетворяющее указанному требованию. Здесь $a(V)$ — некоторая скалярная функция скалярного аргумента V. Явный вид этой функции получается из решения интегрального уравнения (22,18). Для фактического получения решения необходимо знать зависимость эффективного сечения от скорости и углов. Для реальных молекул, даже одноатомных, вид этой функции не известен. Общее представление о характере решений можно получить, если рассмотреть простейший, хотя и не реалистический случай, когда $v_{\text{отн}}\sigma(v_{\text{отн}},\alpha)$ зависит только от угла рассеяния α, но не зависит от скорости.

При этом уравнение (22,18) приобретает вид

$$\frac{m}{kT}\left(V_iV_k-V^2\frac{\delta_{ik}}{3}\right)=$$
$$=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}N\int e^{-\frac{mV_1^2}{2kT}}\sigma\, v_{\text{отн}}\left[\psi_{ik}^{(3)}+\psi_{ik}^{(2)}+\psi_{ik}^{(1)}-\psi_{ik}\right]d\boldsymbol{\Omega}\,d\boldsymbol{v}_1. \quad (22,20)$$

Нетрудно видеть, что интегральный член справа обладает важной особенностью: если функция, стоящая в квадратных скобках, является полиномом, то и интеграл от нее также является полиномом.

Если, в соответствии с нашей упрощенной моделью, принять, что величина

$$g=v_{\text{отн}}\sigma(\alpha,\ v_{\text{отн}})$$

не зависит от скорости, то уравнению (22,20) можно пытаться удовлетворить функцией

$$\psi_{ik} = -\frac{8}{3\sigma N}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}\left(V_i V_k - \frac{V^2}{3}\delta_{ik}\right), \tag{22,21}$$

в чем проще всего убедиться непосредственной подстановкой. Легко видеть, что функция (22,21) удовлетворяет условиям ортогональности.

Соответственно, функция распределения в первом приближении приобретает вид

$$f = f^{(0)}\left[1 - \frac{8}{3}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}\frac{1}{N\sigma}\left(V_i V_k - \frac{V^2}{3}\delta_{ik}\right)U_{ik}\right]. \tag{22,22}$$

С помощью этой функции распределения можно найти явное выражение для тензора напряжений, что и является нашей конечной целью.

Подставляя в (18,12) функцию распределения из (22,22) и вычисляя интеграл, находим

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \frac{4m}{3\sigma}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{22,23}$$

Согласно (8,12) σ_{ik} выражается через тензор U_{ik} и вязкость η.

Сравнивая (8,12) и (22,23), мы приходим к выражению для вязкости идеального газа [в нашей модели $g = g(\alpha)$]:

$$\eta = \frac{2}{3}\frac{m}{\sigma}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}. \tag{22,24}$$

В так называемой модели твердых шариков, в которой принимается, что сечение σ равно геометрической площади сечения сферы, для вязкости получается аналогичное выражение. Формула (22,24) качественно согласуется с опытными данными, хотя, разумеется, она не может претендовать на количественный смысл. Согласие формулы (22,24) с опытом связано, по-видимому, со слабой зависимостью функции распределения φ от закона межмолекулярного взаимодействия. Заметим, что вязкость газа оказывается не зависящей от плотности.

В общем случае, не конкретизируя вида сечения, можно написать для η:

$$\eta = -mN\int (v_i - u_i)(v_k - u_k) f^{(0)}\psi_{ik}\, d\boldsymbol{v},$$

где ψ_{ik} выражается формулой (22,19).

Вязкость — первый из вычисленных нами кинетических коэффициентов. Пользуясь выражением (22,23) для σ_{ik} и подставляя его в (18,14), можно написать

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + f_i \tag{22,25}$$

или, в векторном виде,

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta u + f. \tag{22,25'}$$

Полученное уравнение представляет уравнение Навье — Стокса. Напомним, что оно описывает движение вязкой несжимаемой жидкости и применимо как к случаю сравнительно разреженных газов, так и капельных жидкостей.

Предыдущее рассмотрение показывает, что уравнение Навье — Стокса может быть получено теоретически для случая достаточно разреженных газов, причем вязкость η также может быть вычислена, по крайней мере с точностью до числового коэффициента. Мы не останавливаемся на аналогичных вычислениях для сжимаемого газа[1]).

Совершенно аналогичным образом может быть вычислен поток тепла в термически неоднородном газе.

Считая температуру газа T изменяющейся от точки к точке в газе, а газ не совершающим макроскопического движения, снова будем пытаться искать решение уравнения Больцмана по методу Чэпмена — Энскога в виде (22,6). При этом в локально равновесном распределении $f^{(0)}$ среднюю скорость u_i положим равной нулю, таким образом,

$$f^{(0)} = N(x_k)\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = e^{\frac{\mu - \frac{mv^2}{2}}{kT}}. \tag{22,26}$$

Здесь химический потенциал μ и температура T изменяются от точки к точке, т. е. зависят от координат x_k. Для того чтобы можно было пользоваться методом Чэпмена — Энскога, необходимо, однако, считать это изменение достаточно медленным. Количественный критерий того, что́ можно считать медленным изменением, мы сформулируем ниже. Введение парциального потенциала μ в локально равновесном распределении связано со следующим простым соображением: в неизотермическом газе число частиц в 1 *см*^{3}, так же как и температура, изменяется от точки к точке. Если, однако, газ неподвижен, то давление в нем должно быть постоянным. В противном случае механическое равновесие было бы невозможным и в газе началось бы макроскопическое движение.

Если записать локально равновесное распределение в виде (22,6) и считать парциальный потенциал μ функцией давления и температуры $\mu = \mu(T, p)$, то μ будет зависеть от координат только через посредство температуры.

---

[1]) См., например, Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1944.

Функция f удовлетворяет уравнению (22,7). Вычислим его левую часть, пользуясь (22,26). Имеем, очевидно,

$$v_k \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_k} = v_k \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_k} = v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} f^{(0)} \left[\frac{1}{kT} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right) - \frac{\mu}{kT^2} + \frac{mv^2}{2kT^2} \right] =$$

$$= v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} f^{(0)} \left[-\frac{s}{kT} - \frac{h - sT}{kT^2} + \frac{mv^2}{2kT^2} \right] =$$

$$= -v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} f^{(0)} \frac{\left(h - \frac{mv^2}{2} \right)}{kT^2} = -v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{1}{T} \left(\frac{5}{2} - \frac{mv^2}{2kT} \right) \cdot f^0, \quad (22,27)$$

где h — теплосодержание, отнесенное на одну молекулу. Поэтому уравнение (22,8) приобретает вид [аналогично (22,11)]

$$-v_k f^{(0)} \frac{1}{T} \left(\frac{5}{2} - \frac{mv^2}{2kT} \right) \frac{\partial T}{\partial x_k} = f^{(0)} \int f_1^{(0)} \sigma v_{\text{отн}} \left[\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi \right] d\boldsymbol{v}_1\, d\boldsymbol{\Omega}. \quad (22,28)$$

При этом функция φ по-прежнему должна удовлетворять условиям (22,12) — (22,14).

Из вида уравнения (22,28) ясно, что его решение следует пытаться искать в виде

$$\varphi = \zeta_k \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (22,29)$$

где вектор ζ_k зависит от скорости $\boldsymbol{v}$.

Подставляя (22,28) в (22,29), мы убеждаемся, что решение (22,29) имеет место при всех значениях градиента температуры $\frac{\partial T}{\partial x_k}$, выпадающего из уравнения.

При этом получаем

$$-f^{(0)} \frac{\boldsymbol{v}}{T} \left(\frac{5}{2} - \frac{mv^2}{2kT} \right) = \int f_1^{(0)} \sigma v_{\text{отн}} \left[\zeta_3 + \zeta_2 - \zeta_1 - \zeta \right] d\boldsymbol{v}_1\, d\boldsymbol{\Omega}. \quad (22,30)$$

Уравнение (22,30) представляет уравнение для определения вектора $\boldsymbol{\zeta}$. Единственной векторной величиной, входящей в (22,29), является вектор скорости $\boldsymbol{v}$. Это означает, что направление вектора $\boldsymbol{v}$ является единственным выделенным направлением в пространстве. Поэтому вектор $\boldsymbol{\zeta}$ должен быть ориентирован по этому направлению, т. е.

$$\boldsymbol{\zeta} = \alpha(v) \boldsymbol{v}, \quad (22,31)$$

где $\alpha(v)$ — скалярная функция скалярного аргумента v. Помимо интегрального уравнения, $\alpha(v)$ должна удовлетворять условиям ортогональности (22,12) — (22,14).

Конкретный вид скалярной функции $\alpha(v)$ зависит от вида сечения рассеяния. Если, в частности, проводить вычисление для модели, у которой $g = v_{\text{отн}}\sigma$ зависит только от углов, то после подстановки в (22,30) нетрудно убедиться, что полином

$$\alpha(v) = -\frac{2}{N\sigma T}\left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}$$

удовлетворяет уравнению (22,30).

Поэтому решение (22,28) имеет вид

$$f = f^{(0)}\left[1 - \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{5}{2}\right)\frac{2}{\sigma NT}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} v_k \frac{\partial T}{\partial x_k}\right].$$

Зная функцию распределения, можно найти тепловой поток

$$q_k = \frac{mN}{2}\int v_k v^2 f\, dv = -\frac{5}{2}\frac{mk}{\sigma}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}\frac{\partial T}{\partial x_k}. \tag{22,32}$$

Отсюда следует, что теплопроводность $\varkappa$ равна

$$\varkappa = \frac{5}{8}\frac{mk}{\sigma}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}. \tag{22,33}$$

Интересно отметить, что отношение

$$\frac{\varkappa}{\eta} = \frac{15}{4}k = \frac{5}{2}c_v \tag{22,34}$$

не зависит от величины σ.

Формула (22,33), как и формула для вязкости, находится в качественном согласии с опытом. В частности, она правильно передает температурную зависимость теплопроводности. Формула (22,34) имеет количественный смысл и находится в полном согласии с экспериментом.

§ 23. Время релаксации

Рассмотрим несколько детальнее, как именно происходит переход пространственно-однородного газа, находящегося вне поля сил, в равновесное состояние.

Мы ограничимся газом, находящимся в состоянии достаточно близком к равновесному. Тогда в соответствии со сказанным в § 21 можно положить

$$f = f^{(0)}(1 + \varphi),$$

где $f^{(0)}$ — локальная равновесная функция распределения.

Уравнение Больцмана приобретает вид (21,32). В отсутствие внешнего поля в однородном газе (21,32) имеет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \int f_1^{(0)}\sigma v_{\text{отн}}\left[\varphi_3 + \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi\right] dv_1\, d\Omega. \tag{23,1}$$