

для модели, у которой $g = v_{\text{отн}} \sigma$ зависит только от углов, то после подстановки в (22,30) нетрудно убедиться, что полином

$$\alpha(v) = -\frac{2}{N\sigma T} \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2}$$

удовлетворяет уравнению (22,30).

Поэтому решение (22,28) имеет вид

$$f = f^{(0)} \left[1 - \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \frac{2}{\sigma N T} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right].$$

Зная функцию распределения, можно найти тепловой поток

$$q_k = \frac{mN}{2} \int v_k v^2 f dv = -\frac{5}{2} \frac{mk}{\sigma} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \quad (22,32)$$

Отсюда следует, что теплопроводность κ равна

$$\kappa = \frac{5}{8} \frac{mk}{\sigma} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}. \quad (22,33)$$

Интересно отметить, что отношение

$$\frac{\kappa}{\eta} = \frac{15}{4} k = \frac{5}{2} c_v \quad (22,34)$$

не зависит от величины σ .

Формула (22,33), как и формула для вязкости, находится в качественном согласии с опытом. В частности, она правильно передает температурную зависимость теплопроводности. Формула (22,34) имеет количественный смысл и находится в полном согласии с экспериментом.

§ 23. Время релаксации

Рассмотрим несколько детальнее, как именно происходит переход пространственно-однородного газа, находящегося вне поля сил, в равновесное состояние.

Мы ограничимся газом, находящимся в состоянии достаточно близком к равновесному. Тогда в соответствии со сказанным в § 21 можно положить

$$f = f^{(0)} (1 + \varphi),$$

где $f^{(0)}$ — локальная равновесная функция распределения.

Уравнение Больцмана приобретает вид (21,32). В отсутствие внешнего поля в однородном газе (21,32) имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int f_1^{(0)} \sigma v_{\text{отн}} [\varphi_3 + \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi] dv_1 d\Omega. \quad (23,1)$$

Решение этого неоднородного интегро-дифференциального уравнения можно попытаться искать в виде

$$\varphi(v, t) = \sum A_i \psi_i(v) e^{-\frac{t}{\tau_i(v)}}. \quad (23,2)$$

Для $\psi(v)$ при этом получается линейное интегральное уравнение. Для его решения требуется задание функции $\sigma(v; \alpha)$. Мы видим, таким образом, что временная зависимость выражается рядом (23,2) и определяется бесконечным числом величин τ_i . Сходимость этого ряда, а также существование набора дискретных величин τ_i исследована пока недостаточно полно. Однако смысл ряда (23,2) и величин τ_i вполне ясен. Равновесное распределение устанавливается за времена релаксации τ_i , различные в разных интервалах скоростей.

Это значит, что максвелловское распределение скоростей в разных областях пространства скоростей будет устанавливаться за различное время. Естественно, что различные средние характеристики газа, например, средняя скорость или средняя энергия, будут иметь свои периоды релаксации.

Если, однако, в некотором грубом приближении, пренебречь этим обстоятельством и взять лишь один член ряда, написав

$$f = f^{(0)}(1 + \psi e^{-t/\tau}), \quad (23,3)$$

то для φ получаем

$$\frac{\varphi}{\tau} = -\frac{I}{f^{(0)}}. \quad (23,4)$$

По порядку величины можно оценить τ как

$$\frac{1}{\tau} \simeq N\sigma\bar{v}_{\text{отн}}. \quad (23,5)$$

Множитель N появляется из определения среднего. Кроме того, с той же степенью точности можно написать

$$\varphi = \frac{f - f^{(0)}}{f^{(0)}} = I.$$

В этом приближении кинетическое уравнение приобретает вид

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f - f^{(0)}}{\tau}. \quad (23,6)$$

Последнее уравнение означает, что скорость приближения f к равновесию тем больше, чем больше отклонение от равновесного распределения. При достаточно малых отклонениях от равновесия закон изменения $\frac{\partial f}{\partial t}$ в форме (23,6) передает характер процесса релаксации с достаточной для ряда практических приложений степенью точности.

По-видимому, последнее обстоятельство связано с тем, что функция $f^{(0)}$ вместе с соответствующим весовым множителем имеет довольно резкий максимум.

Поэтому главный вклад в релаксационный процесс дают частицы со скоростью, близкой к средней.

Мы увидим в дальнейшем, что это особенно относится к газу фермиевских частиц.

Очень часто наряду с кинетическим уравнением (23,6) используют релаксационное приближение для получения функции распределения в общем случае пространственно-неоднородного газа, находящегося в поле сил. Именно, кинетическое уравнение представляют в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{F_k}{m} \frac{\partial f}{\partial v_k} = - \frac{f - f^{(0)}}{\tau}. \quad (23,7)$$

Здесь τ считается функцией координат, поскольку плотность газа ρ изменяется от точки к точке.

Из предыдущего ясно, что в этом приближении кинетическое уравнение имеет лишь качественный смысл. Тем не менее при малых отклонениях от равновесия кинетическое уравнение часто можно фактически свести к виду (23,7) при известных допущениях о характере функции τ . В особенности это относится к пространственно-однородным газам, находящимся в поле внешних сил.

В виде иллюстрации степени точности релаксационного приближения вычислим в этом приближении вязкость сжимаемого газа. В релаксационном приближении имеем

$$v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = - \frac{f - f^{(0)}}{\tau}. \quad (23,8)$$

При малых отклонениях от состояния равновесия в левую часть (23,8) следует подставить выражение (22,10), следовательно,

$$- \frac{m}{kT} \left(V_i V_k - \frac{V^2}{3} \delta_{ik} \right) U_{ik} f_0 = \frac{f - f_0}{\tau},$$

откуда

$$f = f_0 - \frac{m\tau}{kT} \left(V_i V_k - \frac{V^2}{3} \delta_{ik} \right) U_{ik} f_0. \quad (23,9)$$

Сравнивая это выражение с (22,22), мы видим, что они оказываются тождественными, если положить

$$\tau = \frac{4}{3\sqrt{2}} \frac{1}{Ng} \simeq \frac{l}{\bar{v}_{\text{отн}}}, \quad (23,10)$$

где $l = \frac{1}{N\sigma_{\text{полн}}}$ — средняя длина свободного пробега.

Таким образом, если считать сечение рассеяния не зависящим от скорости, то релаксационное приближение дает тот же

результат, что и точное решение линеаризованного уравнения Больцмана.

Если сечение зависит от скорости, то различие в выражении для возмущенной функции распределения сведется к числовому коэффициенту. Соответственно будут различными числовые коэффициенты в выражениях для вязкости. Поскольку вид функциональной зависимости сечения от скорости и углов для молекулярных столкновений известен плохо, нет никакой уверенности в значении числовых коэффициентов в формулах для кинетических коэффициентов. Поэтому релаксационное приближение, сильно упрощающее вычисления, дает, в сущности, столь же точное решение задачи.

§ 24. Диффузия легкой примеси в основном газе

Весьма важным случаем, допускающим существенное упрощение кинетического уравнения Больцмана, является диффузия частиц примеси легкого газа к основному тяжелому газу.

Мы будем считать, что концентрация примеси к основному газу мала, т.е. что число частиц примеси в единице объема $n \ll N$, где N — число частиц основного газа. Массу частиц легкого газа m мы будем считать малой по сравнению с массой M частиц основного газа.

Движение примеси может происходить под влиянием разности концентраций (диффузия) или разности температур (термодиффузия).

Мы будем считать, что число частиц основного газа в единице объема постоянно вдоль газа. Число частиц примеси в единице объема изменяется вдоль некоторого направления, которое мы выберем за ось x . Состояние системы будем считать стационарным, влияния внешнего поля сил мы рассматривать не будем. Напишем кинетическое уравнение для функции распределения частиц легкого газа¹⁾.

Функция распределения изменяется только в направлении оси x , так что ее можно написать в виде $f(p, \theta, x)$, где p — импульс частицы, а θ — угол, образуемый вектором импульса с осью x . Поскольку число частиц примеси мало, их столкновения между собой можно не рассматривать. Поэтому в интеграле столкновений следует оставить лишь член, учитывающий столкновения частиц примеси с частицами основного газа. Столкновения легких частиц с тяжелыми можно считать вполне упругими, а скорость их движения — большой по сравнению со скоростью движения тяжелых молекул основного газа. Последние

¹⁾ В этом параграфе мы будем следовать книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, 1944.