Скорость звука c оказывается постоянной:

$$c = \frac{\omega}{\varkappa} = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{kT}{m}}.$$

Учитывая собственные функции и собственные значения более высокого порядка, можно найти закон дисперсии при возрастании частоты.

Оказалось при этом, что скорость звука растет с частотой и одновременно возникает поглощение звука. Коэффициент поглощения быстро растет с уменьшением длины волны. При приближении длины волны звука $1/\varkappa$ к длине свободного пробега коэффициент поглощения возрастает до значения $1/\varkappa$. Это означает, что распространение звука как периодического возмущения прекращается при $\varkappa \sim \frac{1}{\lambda}$.

§ 27. Линеаризованное уравнение Больцмана для квазигазовых систем

Применение уравнения Больцмана не ограничивается случаем идеальных газов. Наоборот, наиболее важные его применения вообще не связаны с рассмотрением идеальных газов. Существует большое число важных случаев, когда кинетическое поведение систем сходно с газовым.

В самом общем виде свойства таких систем, которые мы будем именовать квазигазовыми, могут быть сформулированы следующим образом: пусть имеется некоторая система не взаимодействующих между собой легких частиц (частиц первого сорта), помещенная в среду, образованную другими взаимодействующими между собой тяжелыми частицами (частицами второго сорта). Между частицами обоих сортов имеет место некоторое взаимодействие, имеющее характер парных столкновений. Система частиц первого сорта может быть описана некоторой одночастичной функцией распределения $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$, поскольку между этими частицами нет никакого взаимодействия. Тогда в общем случае можно написать для изменения функции распределения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}\nabla_p f = \left(\frac{df}{dt}\right)_{\text{ст}}, \tag{27,1}$$

где $\left(\frac{df}{dt}\right)_{\text{ст}}$ описывает изменение функции распределения вследствие парного взаимодействия — столкновений между частицами первого и второго сорта.

Предположим, далее, что соударения можно считать совершенно упругими, а состояние частиц второго сорта неизменяющимся при соударениях. Тогда можно написать

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{\text{ст}} = IN = N \int \sigma(v,\ \alpha)\, v\, [f_1 - f]\, d\Omega. \qquad (27{,}2)$$

Здесь, в отличие от (14,10), v представляет скорость легкой частицы, N — число тяжелых частиц в единице объема. В результате для функции распределения легких частиц получается уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = N \int \sigma v\, [f_1 - f]\, d\boldsymbol{\Omega}, \qquad (27{,}3)$$

которое представляет линейное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана. Частным случаем его являлось уравнение (24,2), описывающее диффузию легкой примеси.

В главах, посвященных теории плазмы и теории твердого тела, мы подробно изложим современные представления о поведении электронов в плазме и в твердых телах. Имея в виду дальнейшие приложения, положим, что внешние силы, действующие на частицы первого сорта, являются силами Лоренца:

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\,[\boldsymbol{vH}]\right).$$

Будем считать систему неравновесной, но стационарной, температуру и химический потенциал изменяющимися в пространстве, так что $T = T(\boldsymbol{r})$; $\mu = \mu(\boldsymbol{r})$.

Тогда уравнение (27,3) приобретает вид

$$\frac{\boldsymbol{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\,[\boldsymbol{vH}]\right)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = N \int \frac{\boldsymbol{p}}{m}\, \sigma\, (f_1 - f)\, d\boldsymbol{\Omega}. \qquad (27{,}4)$$

Для нахождения решения стационарного линейного уравнения Больцмана будем считать заданным локально равновесное распределение $f^{(0)}(\varepsilon, T, \mu)$, где ε — энергия частицы, μ и T локальные значения температуры и парциального потенциала. Локально равновесное распределение $f^{(0)}$ может быть как распределением Максвелла, так и распределением Ферми или Бозе. Считая отклонение от состояния равновесия достаточно малым, можно пытаться искать решение (27,4) в виде

$$f \cong f^{(0)} + f'(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{r}),$$

где $|f'| \ll f^{(0)}$. Физически это означает, что все поля, действующие на частицы, а также все градиенты температуры и концентраций малы. В отличие от $f^{(0)}$, добавка к функции распределения f' не обладает сферической симметрией в пространстве импульсов.

Сохранение полного числа частиц требует выполнения условия

$$\int f'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{p} = 0. \tag{27,5}$$

В общем случае можно написать

$$f^{(0)} = f^{(0)}\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right). \tag{27,6}$$

Подставляя (27,5) в (27,4), будем удерживать в нем лишь величины старшего порядка малости.. Имеем, очевидно,

$$\frac{\boldsymbol{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} \simeq \frac{\boldsymbol{p}}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

Преобразуем значение производной:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial f^{(0)}\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kt}\right)}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon - \mu)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{kT}\right) - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\frac{1}{kT}\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{r}},$$

так что

$$\frac{\boldsymbol{p}}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{p}}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\left[(\varepsilon - \mu)\nabla\frac{1}{kT} - \frac{\nabla\mu}{kT}\right]. \tag{27,7}$$

Далее, имеем

$$e\boldsymbol{E}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} \simeq e\boldsymbol{E}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{e\boldsymbol{pE}}{m}\left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\right), \tag{27,8}$$

$$\frac{e}{mc}[\boldsymbol{pH}]\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{e}{mc}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\frac{\boldsymbol{p}}{m}[\boldsymbol{pH}] + \frac{e}{mc}\frac{\partial f'}{\partial \boldsymbol{p}}[\boldsymbol{pH}] = \frac{e[\boldsymbol{pH}]}{mc}\frac{\partial f'}{\partial \boldsymbol{p}}, \tag{27,9}$$

поскольку первое слагаемое тождественно обращается в нуль.

Наконец, для интеграла столкновений находим

$$I = N\int \frac{p}{m}\sigma[f_1' - f']\, d\boldsymbol{\Omega},$$

поскольку равновесное распределение обращает I в нуль. Подставляя (27,7), (27,9) в (27,4) находим окончательно

$$\frac{\boldsymbol{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\frac{\boldsymbol{p}}{m}\left\{(\varepsilon - \mu)\nabla\frac{1}{kT} - \frac{\nabla\mu}{kT} + e\boldsymbol{E}\right\} =$$
$$= -\frac{e}{mc}[\boldsymbol{pH}]\frac{\partial f'}{\partial \boldsymbol{p}} + N\int \sigma\frac{p}{m}[f_1' - f']\, d\boldsymbol{\Omega}. \tag{27,10}$$

Из-за наличия в правой части дополнительного члена решение уравнения (27,9) в магнитом поле имеет некоторые особенности. Мы рассмотрим его в гл. III, а пока положим $\boldsymbol{H} = 0$. Тогда уравнение (27,10) превращается в линейное интегральное уравнение, которое удобно записать сокращенно в виде

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = N\frac{p}{m}\int \sigma\left(\left|\frac{p}{m}\right|,\ \alpha\right)[f_1' - f']\,d\boldsymbol{\Omega}.$$

Будем пытаться искать его решение, как это было уже сделано в § 24, в виде

$$f' = -\alpha p A \cos\theta,$$

где $\theta = \angle(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A})$ и α — некоторая постоянная. Тогда имеем

$$pA\cos\theta = \alpha\frac{p}{m}NA\int \sigma\left(\left|\frac{p}{m}\right|,\ \alpha\right)[\cos\theta_1 - \cos\theta]\,d\boldsymbol{\Omega},$$

где $\theta_1 = L(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{A})$. Значение $\cos\theta'$ можно выразить через $\cos\theta$ и $\cos\alpha$ с помощью формулы сферической тригонометрии [т. I, (1.6)]. Пользуясь этим выражением, находим

$$\int \sigma\left(\left|\frac{p}{m}\right|,\ \alpha\right)(\cos\theta\cos\alpha - \cos\theta)\,d\boldsymbol{\Omega} = -\cos\theta\sigma_{tr}.$$

Таким образом, имеем

$$\alpha = \frac{1}{Nv\sigma_{tr}} = \tau.$$

Окончательно для функции распределения получаем

$$f = f_0 - \tau\frac{p}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\left\{(\varepsilon - \mu)\nabla\frac{1}{kT} - \frac{\nabla\mu}{kT} + e\boldsymbol{E}\right)\right\}. \qquad (27,11)$$

Заметим прежде всего, что интеграл столкновений в том же приближении можно написать в виде

$$NI = N\frac{f - f^{(0)}}{\tau}.$$

Последнее выражение сразу показывает, что τ представляет не что иное, как время релаксации [сравни с (23,6)].

Нарушение сферической симметрии функции распределения в пространстве импульсов оказывается пропорциональным значению $\cos\theta$. Фактически представление функции распределения в виде (27,11) означает разложение ее в ряд по полиномам Лежандра, в котором удержан первый член разложения. Легко видеть, что дополнительное условие на функцию распределения (27,5) автоматически удовлетворяется.

Нарушение сферической симметрии функции распределения вызывает появление среднего потока частиц, плотность которого равна

$$\boldsymbol{j} = \int \boldsymbol{v} f\,d\boldsymbol{p} = -\int \tau\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}\left\{\frac{p}{m},\ (\varepsilon - \mu)\nabla\frac{1}{kT} - \frac{\Delta\mu}{kT} + e\boldsymbol{E}\right\}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{p}. \qquad (27,12)$$

Поток j согласно (21,8) представляет первый момент функции распределения.

Полезно заметить, что поток j зависит от свойств системы только через посредство производной по энергии от равновесной функции распределения (27,6). Ясно, что если бы распределение по энергиям было равномерным, поток частиц обратился бы в нуль.

В главе V мы воспользуемся полученными выражениями для f и j.

§ 28. Решение уравнения Больцмана для квазигазовых систем во внешнем поле сил

В дальнейшем мы будем пользоваться общим решением линеаризованного уравнения Больцмана во внешнем поле сил.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = I. \tag{28,1}$$

Будем считать поле внешних сил слабым и искать решение (28,1) в виде ряда последовательных приближений. Ограничиваясь нулевым и первым членами разложения, можем написать

$$f = f^{(0)}(\boldsymbol{v},\ t) + f'(\boldsymbol{v},\ t), \tag{28,2}$$

где $f^{(0)}$ отвечает отсутствию поля, а f' — пропорционально полю.

Чтобы не выписывать громоздких формул, ограничимся сначала пространственно-однородной системой, т. е. положим $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = 0$. Тогда имеем

$$\frac{\partial f'}{\partial t} - I(f') = -\frac{\boldsymbol{F}}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}}, \tag{28,3}$$

где $I(f')$ — значение оператора столкновений, в котором в качестве функции распределения взята функция f'.

Наряду с уравнением (28,3) введем уравнение Грина

$$\frac{\partial W}{\partial t} - I(W) = \delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')\,\delta(t - t'), \tag{28,4}$$

где W — функция Грина, удовлетворяющая условиям

$$\left.\begin{aligned} W &= \begin{cases} 0 & t < t', \\ \infty & t = t', \end{cases} \\ \frac{\partial W}{\partial t} &- I(W) = 0 \quad t > t' \end{aligned}\right\}. \tag{28,5}$$

Смысл функции Грина весьма прост: она представляет вероятность того, что частица, имевшая в момент времени t' скорость v', в момент t будет иметь скорость v.