Поток j согласно (21,8) представляет первый момент функции распределения.

Полезно заметить, что поток j зависит от свойств системы только через посредство производной по энергии от равновесной функции распределения (27,6). Ясно, что если бы распределение по энергиям было равномерным, поток частиц обратился бы в нуль.

В главе V мы воспользуемся полученными выражениями для f и j.

§ 28. Решение уравнения Больцмана для квазигазовых систем во внешнем поле сил

В дальнейшем мы будем пользоваться общим решением линеаризованного уравнения Больцмана во внешнем поле сил.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = I. \tag{28,1}$$

Будем считать поле внешних сил слабым и искать решение (28,1) в виде ряда последовательных приближений. Ограничиваясь нулевым и первым членами разложения, можем написать

$$f = f^{(0)}(\boldsymbol{v},\ t) + f'(\boldsymbol{v},\ t), \tag{28,2}$$

где $f^{(0)}$ отвечает отсутствию поля, а f' — пропорционально полю.

Чтобы не выписывать громоздких формул, ограничимся сначала пространственно-однородной системой, т. е. положим $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = 0$. Тогда имеем

$$\frac{\partial f'}{\partial t} - I(f') = -\frac{\boldsymbol{F}}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}}, \tag{28,3}$$

где $I(f')$ — значение оператора столкновений, в котором в качестве функции распределения взята функция f'.

Наряду с уравнением (28,3) введем уравнение Грина

$$\frac{\partial W}{\partial t} - I(W) = \delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')\,\delta(t - t'), \tag{28,4}$$

где W — функция Грина, удовлетворяющая условиям

$$\left.\begin{aligned} &W = \begin{cases} 0 & t < t', \\ \infty & t = t', \end{cases} \\ &\frac{\partial W}{\partial t} - I(W) = 0 \quad t > t' \end{aligned}\right\}. \tag{28,5}$$

Смысл функции Грина весьма прост: она представляет вероятность того, что частица, имевшая в момент времени t' скорость v', в момент t будет иметь скорость v.

Решение уравнения (28,3) может быть выражено через функцию Грина обычной формулой:

$$f(\boldsymbol{v},\ t) = -\int d\boldsymbol{v}' \int dt' \frac{\boldsymbol{F}}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}'} \cdot W(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}',\ t-t') =$$

$$= -\int d\boldsymbol{v}' \int\limits_{-\infty}^{0} dt'\, W(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}',\ t-t') \frac{\boldsymbol{F}}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}'}. \qquad (28,6)$$

При этом мы воспользуемся первым свойством функции Грина (28,5). Формула (28,6) дает общую связь между изменением функции распределения и вероятностью перехода W. Зная $f'(\boldsymbol{v}, t)$, можно найти поток частиц по формуле

$$\boldsymbol{j} = \int \boldsymbol{v} f(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} = \int \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{v} \int d\boldsymbol{v}' \int\limits_{-\infty}^{0} dt' \frac{\boldsymbol{F}}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}'} \cdot W(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}',\ t-t'). \quad (28,7)$$

Аналогичные выражения могут быть получены для пространственно-неоднородной, но стационарной системы. При этом вместо (28,3) и (28,4) имеем (для простоты в одномерном случае)

$$v \frac{\partial f'}{\partial x} - I(f') = -\frac{F}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v}, \qquad (28,8)$$

$$\frac{\partial W(x,\ x',\ t-t')}{\partial x} - \frac{I(W)}{v} = \delta(x-x')\,\delta(v-v'), \qquad (28,9)$$

где W представляет вероятность того, что частица, находившаяся в точке x' и имевшая скорость v', перейдет в точку x и приобретает скорость v в единицу времени.

Решение (28,8) имеет вид

$$f'(v,\ r) = -\int W \cdot \left(\frac{F}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v'}\right) dx\, dv'. \qquad (28,10)$$

В частности, если положить

$$I = \frac{W}{\tau},$$

то (28,9) приобретает вид

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{W}{\tau v} = \delta(x-x')\,\delta(v-v').$$

Отсюда следует, что

$$W = \begin{cases} e^{\frac{x-x'}{\tau v}}, & x > x', \\ 0, & x < x', \end{cases}$$

и (28,10) можно написать в виде

$$f'(v,\ x) = \int \left(\frac{F}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v'}\right) e^{-\frac{x''}{\tau v}}\, dx''. \qquad (28,11)$$

Интегрирование ведется по отрезку траектории, проходящему через точку x в направлении поля, для которого $x'' < x$ [мы произвели замену $(x - x') \to x''$].

Смысл экспоненциального множителя становится весьма прост, если написать его в виде $\exp(-x''/\lambda)$, где λ — длина свободного пробега.

Таким образом, во внешнем поле сил линеаризованное уравнение Больцмана допускает решение, выражающееся в самом общем виде через вероятность перехода W. Этой формой решения мы будем пользоваться в дальнейшем.

§ 29. Кинетическое уравнение для неодноатомных газов

До сих пор мы ограничивались случаем, когда молекулы газа имели только поступательные степени свободы. Это является хорошим приближением для рассмотрения одноатомных газов. Однако в более важном случае многоатомных газов применимость этого приближения заранее не очевидна. Оказывается, что возможно сформулировать в самом общем виде кинетическое уравнение для двухатомных (линейных) молекул или молекул типа волчка[1]).

Такие молекулы имеют две вращательные степени свободы. Вращательные уровни всегда сильно возбуждены (ср. § 44 ч. III), так что их можно рассматривать классически.

Колебательные степени свободы можно считать не возбужденными при не слишком высоких температурах. Таким образом, движение молекулы задается тремя поступательными и двумя вращательными степенями свободы. Вращательное состояние молекулы можно характеризовать двумя обобщенными координатами (например, двумя углами) и двумя отвечающими этим координатам обобщенными импульсами.

Удобнее, однако, характеризовать вращательное движение четырьмя величинами — тремя компонентами момента импульса M_i $(i = 1, 2)$ и углом ψ, характеризующим ориентацию молекулы в плоскости, перпендикулярной к вектору M_i. В этих переменных кинетическое уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} + \dot{\psi}\frac{\partial f}{\partial \psi} + \dot{\boldsymbol{M}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{M}} = I. \tag{29,1}$$

Интеграл столкновений имеет вид

$$I = \int (f_2 f_3 w' - f f_1 w)\, d\boldsymbol{v}_1\, d\Omega_V\, d\boldsymbol{M}_1\, d\boldsymbol{M}\, d\psi = \\ = \int w (f_2 f_3 - f f_1)\, d\boldsymbol{v}_1\, d\Omega_V\, d\boldsymbol{M}_1\, d\boldsymbol{M}\, d\psi, \tag{29,2}$$

---

[1]) Мы следуем в дальнейшем работам Ю. Кагана и др., ЖЭТФ, **41**, 1536 (1961); **41**, 844 (1961); **51**, 1893 (1966).