

Распределение нейтронов по энергиям имеет вид

$$N(E) = \frac{l}{v} \psi_0 = \frac{l}{v} \frac{Q_0}{\xi},$$

где величина ξ по определению равна

$$\xi = \frac{1 - e^{-u_M} + e^{-u_M} u_M}{1 - u_M}.$$

Эта величина, как показывает простое рассмотрение, представляет среднелогарифмическую потерю энергии нейтрона при одном соударении.

§ 31. Пространственное распределение нейтронов

Обсудим теперь важную проблему о пространственном распределении нейтронов.

Допустим, что можно пренебречь изменением энергии нейтронов при рассеянии на ядрах. Это имеет место, например, для нейтронов, замедлившихся до энергии $\sim kT$ (так называемых тепловых нейтронов). Если пренебречь изменением энергии, то в уравнении (30,4) энергию можно считать фиксированной. Если источники поставляют нейтроны в среду стационарным образом, то установится стационарное распределение нейтронов в пространстве. Функцию распределения можно считать зависящей только от координат и направления движения нейтронов. Последнее можно характеризовать единичным вектором

$$v_1 = \frac{v}{v}. \quad (31,1)$$

Функция распределения нейтронов удовлетворяет уравнению:

$$v \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{v}{l_t} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) = \int \frac{v}{l_{sc}} \omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1) f(\mathbf{v}'_1, \mathbf{r}) d\Omega' + \frac{q(\mathbf{r})}{4\pi}. \quad (31,2)$$

В интеграле столкновений интегрирование ведется только по углам, поскольку абсолютная величина импульса при столкновениях не изменяется.

Сокращая (31,2) на $\frac{v}{l_t}$ и вводя обозначения

$$\frac{\alpha}{4\pi} = \frac{l_t}{l_{sc}}, \quad s(\mathbf{r}) = q \cdot \frac{l_t}{v}, \quad (31,3)$$

имеем

$$v_1 l_t \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + f = \frac{\alpha}{4\pi} \int \omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1) f d\Omega' + \frac{s(\mathbf{r})}{4\pi}. \quad (31,4)$$

Уравнение (31,4) сходно с уравнением для функции распределения молекул легкого газа, диффундирующего в тяжелом

(§ 24). Важное отличие, однако, заключается в наличии источников частиц и их поглощения в среде.

В тех случаях, когда рассеяние можно считать изотропным $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1) = 1$, уравнение (31,4) допускает точное решение. Исходя из точного решения уравнения (31,4), можно найти распределение плотности нейтронов в пространстве. Сравнивая его с распределением, полученным в диффузионном приближении, найденном в § 24, мы сможем оценить точность последнего.

Для получения точного решения удобно воспользоваться методом разложения в интеграл Фурье.

Написав

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) dV, \quad \varphi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} s(\mathbf{r}) dV$$

имеем

$$(1 + i\mathbf{k}\mathbf{v}_1 l_t) \psi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) = \frac{\varphi(\mathbf{k})}{4\pi} + \frac{\alpha}{4\pi} \int \psi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) d\Omega'$$

или

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) = \frac{\varphi(\mathbf{k}) + \alpha \int \psi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) d\Omega'}{4\pi(1 + i\mathbf{k}\mathbf{v}_1 l_t)}. \quad (31,5)$$

Интегрируя (31,5) по углам, получим

$$\int \psi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) d\Omega = \frac{\varphi(\mathbf{k}) + \alpha \int \psi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) d\Omega'}{4\pi} \int \frac{d\Omega'}{(1 + i\mathbf{k}\mathbf{v}_1 l_t)}. \quad (31,6)$$

Последний интеграл вычисляется непосредственно

$$\int \frac{d\Omega}{1 + i\mathbf{k}\mathbf{v}_1 l_t} = 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{1 + ikl_t \cos \theta} = \frac{2\pi}{ikl_t} \ln \frac{1 + ikl_t}{1 - ikl_t} = \frac{4\pi}{kl_t} \operatorname{arctg} kl_t.$$

Подставляя это значение в (31,6), получаем

$$\int \psi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) d\Omega = \frac{\varphi(\mathbf{k})}{\frac{kl_t}{\operatorname{arctg} kl_t} - \alpha}. \quad (31,7)$$

Заметим теперь, что интеграл, стоящий в левой части (31,6), представляет не что иное, как фурье-компоненту плотности нейтронов

$$\begin{aligned} N(\mathbf{r}) &= \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) d\Omega = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\Omega dk = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dk \int \psi(\mathbf{k}, \mathbf{v}_1) d\Omega, \quad (31,8) \end{aligned}$$

где $N(r)$ — число нейтронов в единице объема среды. Подставляя (31,7) в (31,8), находим

$$N(r) = \int e^{ikr} \left(\int \Psi(\mathbf{k}, v_1) d\Omega \right) d\mathbf{k} = \int \frac{\varphi(\mathbf{k}) e^{ikr} d\mathbf{k}}{\frac{kl_t}{\operatorname{arctg} kl_t} - \alpha}. \quad (31,9)$$

Для получения конкретного выражения для плотности нейтронов, рассмотрим случай точечного источника

$$s(\mathbf{r}) = s_0 \delta(\mathbf{r}).$$

Тогда

$$\varphi(\mathbf{k}) = \frac{l_t}{v} \frac{s_0}{(2\pi)^3}$$

и

$$\begin{aligned} N(r) &= \frac{l_t}{v} \frac{s_0}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{ikr \cos \theta} k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi}{\frac{kl_t}{\operatorname{arctg} kl_t} - \alpha} = \\ &= \frac{l_t}{irv} \frac{s_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr} k dk}{\frac{kl_t}{\operatorname{arctg} kl_t} - \alpha}. \end{aligned} \quad (31,10)$$

Вычисление интеграла удобно выполнить в комплексной области. Рассмотрим интеграл по контуру, изображенному на рис. 40.

$$I = \int \frac{e^{i\beta z} z dz}{\frac{z}{\operatorname{arctg} z} - \alpha}. \quad (31,11)$$

Подынтегральное выражение в (31,11) имеет полюс первого порядка в точке

$$\frac{z_1}{\operatorname{arctg} z_1} = \alpha \quad (31,12)$$

и точку ветвления

$$z_2 = i.$$

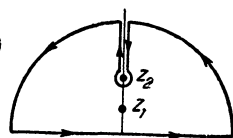


Рис. 40.

Контур обходит точку ветвления, интеграл по большой и малой окружностям обращаются в нуль и остается лишь вычет в точке z_1 и интеграл по мнимой оси

$$I = 2\pi i \operatorname{Re}(z_1) + \int_i^{i\infty} \frac{e^{i\beta z} z dz}{\frac{z}{\operatorname{arctg} z} - \alpha}.$$

Оценки¹⁾ показывают, что на больших расстояниях от источника ($r \gg l_t$) второе слагаемое мало по сравнению с первым и интеграл по мнимой оси мы просто отбросим.

¹⁾ А. Д. Г а л а н и н, Теория ядерных реакторов, Атомиздат, 1957.

Обозначим через i/L корень уравнения (31,12), т. е. положим

$$\frac{il_t}{L} = \alpha \operatorname{arctg} \frac{il_t}{L}. \quad (31,13)$$

Тогда, вычисляя вычет в точке (31,13) и подставляя значение I в (31,10), получаем

$$N(r) = \frac{l_t}{v} \frac{s_0}{2\pi\alpha L^2} \frac{1 - \frac{l_t^2}{L^2}}{\alpha + \frac{l_t^2}{L^2} - 1} \frac{e^{-r/L}}{r}. \quad (31,14)$$

Рассмотрим случай малого поглощения $l_t \simeq l_{sc}$. В трансцендентном уравнении (31,13) можно разложить арктангенс в ряд и написать приближенное его решение в виде

$$L^2 \simeq L_0^2 = \frac{1}{3} l_c l_{sc}. \quad (31,15)$$

При этом очевидно, что $l \gg l_{sc}$. Тогда (31,14) приобретает вид

$$N(r) \simeq \frac{3s_0}{4\pi l_{sc} v} \frac{e^{-r/L_0}}{r}. \quad (31,16)$$

Интересно сравнить пространственное распределение частиц (31,16) с распределением частиц в диффузионном приближении. В диффузионном приближении решение уравнения Больцмана согласно (24,17) приводит к коэффициенту диффузии $D = \frac{l_s v}{3}$. Функция распределения $N(r)$ удовлетворяет при этом уравнению

$$D \Delta N(r) - \frac{N(r)}{\tau} = \frac{s_0}{4\pi} \delta(r),$$

где $\tau = \frac{l_c}{v}$. Решение его в точности совпадает с (31,16) при $l_c \ll l_{sc}$. Таким образом, в случае слабого поглощения точное решение кинетического уравнения оказывается с большой степенью точности совпадает с решением уравнения диффузионного приближения на больших расстояниях от источника $r \gg l_{sc}$. Численное сравнение решений кинетического и диффузионного уравнений показывает, что оба решения практически совпадают на расстояниях от источника, больших чем $2l_{sc}$.

В обратном предельном случае очень сильного поглощения, когда $l_t \sim l_c$, уравнение приводит к значению

$$L \simeq 1,05 l_t.$$

Это означает, что $N(r)$ существенно уменьшается на расстоянии $\sim l_t$ от источника. В заключение подчеркнем, что получен-

ные результаты имеют весьма общий характер. Они в равной мере относятся ко всем частицам, движущимся в веществе и испытывающим рассеяние и захват, если только взаимодействие с рассеивающими центрами имеет характер близкодействия.

§ 32. Кинетическое уравнение в плазме без столкновений

Непосредственное применение уравнения Больцмана к плазме требует осторожности. Заряженные частицы в плазме взаимодействуют по закону Кулона, так что силы взаимодействия между ними сравнительно медленно убывают с расстоянием. Поэтому необходимо обсудить те изменения, которые нужно внести в вычисление интеграла столкновений для учета особенностей кулоновских взаимодействий. Мы отложим, однако, это обсуждение до § 33, а пока заметим, что наличие сил дальнего действия может в какой-то мере не только усложнять, но и упрощать задачу. Именно, поскольку силы взаимодействия медленно убывают с расстоянием, в системе заряженных частиц должны возникать коллективные движения, в которых принимают участие сравнительно большие группы частиц.

Можно говорить о коллективных возбуждениях в плазме, в которые вовлекается вся система как целое. При рассмотрении таких крупномасштабных движений можно пренебречь неоднородностями (флуктуациями) в системе и вовсе не учитывать парных столкновений между частицами.

Из теории рассеяния в поле кулоновских сил [см. § 43 ч. I; § 86 ч. V] мы знаем, что существенное отклонение частиц происходит при минимальных значениях прицельного параметра

$$\rho_{\min} \sim \frac{e^2}{mv^2} \sim \frac{e^2}{\bar{\epsilon}},$$

где $\bar{\epsilon} \sim kT$ — средняя энергия частиц с температурой T . Если имеет место неравенство

$$\rho_{\min} \ll \bar{r} \sim \frac{1}{n^{1/3}}, \quad (32,1)$$

где \bar{r} — среднее расстояние между частицами, а n — их плотность, то роль парных соударений становится сравнительно малой по сравнению с кулоновским взаимодействием частиц на больших, порядка \bar{r} , расстояниях. В этом случае в системе частиц с кулоновским взаимодействием характер функции распределения будет определяться в основном не парными столкновениями, а средними силами, действующими на частицы. Полезно заметить что неравенство (32,1) эквивалентно