§ 33. Дисперсия и затухание плазменных волн

Мы рассматривали уже в ч. IV теорию плазменных волн. Мы получили закон дисперсии для плазменных волн, в приближении, когда плазму можно было считать сплошной средой (т. е. в гидродинамическом приближении). Здесь, однако, мы можем существенно уточнить макроскопическую теорию и, в частности, найти закон дисперсии и затухания плазменных волн.

Рассмотрим высокочастотные собственные колебания пространственно-однородной плазмы в отсутствии внешнего электромагнитного поля.

Кинетическое уравнение для функции распределения электронов в приближении самосогласованного поля имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{e}{m}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{vH}]\right)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=0. \tag{33,1}$$

Тяжелые ионы считаются неподвижными.

Считая поле слабым, будем пытаться искать решение системы уравнений (33,1) и (33,4) в виде

$$f=f_0+f_1, \tag{33,2}$$

где f_0 — функция распределения электронов в отсутствие колебаний и

$$f_1 \ll f_0.$$

Подставляя это выражение в (33,1) найдем без труда для f_1:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{e}{m}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{vH}]\right)\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}}=0. \tag{33,3}$$

Здесь f_1 является функцией координат, скоростей и времени, т. е.

$$f_1=f_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t).$$

Кинетическое уравнение без интеграла столкновений допускает значительное упрощение. В этом приближении можно считать, что все частицы движутся по заданным траекториям под действием самосогласованного и внешнего полей. Поэтому, если $\boldsymbol{r}_0$ — координата частицы в момент времени $t=0$, то можно написать

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_0^t \boldsymbol{v}\,dt, \tag{33,4}$$

где $\boldsymbol{v}(t)$ определено уравнением движения частицы,

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}_0+\int_0^t \frac{\boldsymbol{F}}{m}\,dt. \tag{33,5}$$

Введём в качестве новых переменных значения r_0 и v_0. Тогда

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{r_0,\, v_0} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{r,\, v} + \frac{\partial f_1}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_{r_0,\, v_0} + \\ + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{r_0,\, v_0} \simeq \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{r,\, v} + v\frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{F}{m}\frac{\partial f_1}{\partial v}.$$

Здесь мы приняли, что производные $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_{r_0,\, v_0}$ и $m\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{r_0,\, v_0}$ — точные значения скорости — совпадают со скоростью и действующей силой для невозмущенного движения. Это верно с точностью до величин второго порядка малости. Поскольку указанные величины умножаются на производные от возмущенной функции распределения f_1, такая замена законна. Тогда кинетическое уравнение (33,3) приобретает весьма простой вид:

$$\frac{\partial f_1(r_0, v_0, t)}{\partial t} + \frac{eE(r_0, t)}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v(t)} = 0. \tag{33,6}$$

Последнее уравнение интегрируется непосредственно.

Если принять, что

$$f_1(r_0, t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty,$$

то, интегрируя (33,6) по невозмущенным траекториям, имеем

$$f_1 = -\frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} E(r_0, t')\frac{\partial f_0}{\partial v(t')}dt' = -\frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} E(r - vt', t')\frac{\partial f_0}{\partial v(t')}dt'. \tag{33,7}$$

Еще раз подчеркнем, что столкновения нарушают движение частиц и лишают возможности пользоваться представлением о движении по траекториям. Рассмотрим случай изотропной однородной плазмы, когда возмущением служит поле электромагнитной волны. В отсутствие возмущения $v = v_0 = \text{const}$.

В изотропной плазме f_0 не зависит от углов. Поэтому в выражении для силы можно было оставить только электрическую силу eE[1]). Разложим поле E в интеграл Фурье.

Тогда для f_1 имеем:

$$f_1 = -\frac{e}{m}\int dk \int d\omega \int_{-\infty}^{t} E(k, \omega)\, e^{i(kr - \omega t')}e^{-ikv(t')t'}\frac{\partial f_0}{\partial v}dt'. \tag{33, 8}$$

---

[1]) Произведение $[vH]\frac{\partial f_0}{\partial v} = 2[vH]\, v\frac{\partial f_0}{\partial v^2} = 0.$

Поправка к функции распределения, создаваемая отдельной гармоникой поля, имеет вид

$$f_1^{(\boldsymbol{k},\,\omega)} = -\frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)\, e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}t' - \omega(t'-t))}\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}(t)}\,dt'. \qquad (33,9)$$

Зная поправку к функции распределения, можно найти соответствующий ей электрический ток

$$j_i = en\int v_i(t)\, f_1^{(\boldsymbol{k},\,\omega)}\,d\boldsymbol{v} =$$

$$= -\frac{e^2 n}{m}E_i(\boldsymbol{k},\omega)\int d\boldsymbol{v}\int_{-\infty}^{t} v_j(t)\frac{\partial f_0}{\partial v_j(t')}e^{-i[\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}t' - \omega(t-t')]}\,dt'. \qquad (33,10)$$

Введем новую переменную:

$$\tau = t - t'.$$

Тогда

$$j_i = -\frac{e^2 n}{m}E_i(\boldsymbol{k},\omega)\int d\boldsymbol{v}\int_0^{\infty} v_i(0)\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}(t-\tau)}\,e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}(t-\tau)+\omega\tau)}\,d\tau. \qquad (33,11)$$

Поскольку время t ничем не выделено, можно положить в интеграле $t = 0$ и ток, генерируемый одной гармоникой поля, оказывается равным

$$j_i = -\frac{e^2 n}{m}E_i(\boldsymbol{k},\omega)\int d\boldsymbol{v}\int v_j(0)\,\frac{\partial f_0}{\partial v_j(\tau)}\,e^{i\omega\tau}e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}\tau}\,d\tau. \qquad (33,12)$$

Подчеркнем, что здесь f_0 означает функцию распределения электронов в плазме в отсутствие колебаний. Вообще говоря, f_0 не является равновесной функцией распределения.

Если, однако, считать, что плазма является равновесной, то f_0 представляет распределение Максвелла (нормированное на единицу) и

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_j} = \frac{\partial f_M}{\partial v_j} = -\frac{m v_j}{kT}f_M. \qquad (33,13)$$

Тогда формула (33,11) приобретает вид

$$j = \frac{e^2 n}{kT}E_j(\boldsymbol{k},\omega)\,e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega t)}\int d\boldsymbol{v}\int_0^{\infty} v_l(0)\,v_j(\tau)\,e^{i(\omega-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\tau}f_M\,d\tau. \qquad (33,14)$$

В § 39 мы обсудим это выражение, имеющее весьма общий характер и связывающее ток с корреляцией скоростей в моменты времени, отделенные промежутком времени τ. Однако в рассматриваемом нами случае, когда внешнее магнитное поле отсутствует, частицы движутся с постоянной скоростью, так что $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}(\tau) = \text{const}$. Поэтому мы опустим значение аргумента при скорости в дальнейших формулах.

Формула (33,12) дает для тензора электропроводности, определяемого из соотношения $j_i(\omega) = \sigma_{ik}(\omega) E_k(\omega)$, выражение

$$\sigma_{ij} = -\frac{e^2 n}{m} \int d\boldsymbol{v} \int v_i \frac{\partial f_0}{\partial v_j} e^{i(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\tau}\, d\tau. \tag{33,15}$$

Согласно общей формуле (33,20) ч. IV, т. I диэлектрическая проницаемость ε_{ij} имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_{ij} = \delta_{ij} - i\frac{4\pi e^2 n}{m\omega} \int d\boldsymbol{v} \int v_i \frac{\partial f}{\partial v_j} e^{i(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\tau}\, d\tau \tag{33,16}$$

или, для равновесной плазмы,

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + i\frac{4\pi e^2 n}{\omega kT} \int f_M\, d\boldsymbol{v} \int v_i v_j e^{i(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\tau}\, d\tau =$$

$$= \delta_{ij} + i\frac{4\pi e^2 n}{\omega kT} Av\left\{\int v_i v_j e^{i(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\tau} d\tau\right\}, \tag{33,17}$$

где $Av\{\quad\}$ означает усреднение по максвелловскому распределению.

Выберем направление вектора $\boldsymbol{k}$ за ось z. Тогда легко видеть, что в изотропной плазме, которую мы рассматриваем, отличны от нуля только три компоненты тензора ε_{ij}, перпендикулярные к направлению распространения волны,

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 + i\frac{4\pi e^2 n}{\omega kT}\left(\overline{v_x^2}\right)\left\langle \int\limits_0^\infty e^{i(\omega - kv_z)\tau}\, d\tau \right\rangle = 1 + i\frac{4\pi e^2 n}{\omega m}\langle I_1\rangle \tag{33,18}$$

и параллельная этому направлению

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{zz} = 1 + i\frac{4\pi e^2 n}{\omega kT}\left\langle v_z^2 \int\limits_0^\infty e^{i(\omega - kv_z)\tau}\, d\tau \right\rangle = 1 + i\frac{4\pi e^2 n}{kT\omega}\langle I_2\rangle, \tag{33,19}$$

где $\langle\quad\rangle$ означают среднее по компоненте скорости v_z, так что

$$\langle I_1\rangle = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} \left(\int\limits_0^\infty e^{i(\omega - kv_z)\tau}\, d\tau\right) dv_z, \tag{33,20}$$

$$\langle I_2\rangle = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_z^2 e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} \left(\int\limits_0^\infty e^{i(\omega - kv_z)\tau}\, d\tau\right) dv_z. \tag{33,21}$$

Зная продольную и поперечную компоненты тензора диэлектрической проницаемости, можно найти закон дисперсии продольных и поперечных волн (см. § 33 ч. IV). Именно, закон дисперсии продольных волн определится условием

$$\varepsilon_{\parallel}=0, \tag{33,22}$$

тогда как закон дисперсии поперечных волн получается из соотношения

$$\varepsilon_{\perp}-\frac{k^2c^2}{\omega^2}=1+i\frac{2\pi e^2 n}{m\omega}\langle I_1\rangle-\frac{k^2c^2}{\omega^2}=0. \tag{33,23}$$

Мы начнем с рассмотрения дисперсии продольных волн. С учетом (33,22) и (33,19) находим трансцендентное уравнение, связывающее ω и k:

$$1+i\frac{4\pi e^2 n}{kT\omega}\langle I_2\rangle=0. \tag{33,24}$$

Найдем прежде всего интеграл по переменной τ. Для того чтобы этот интеграл имел определенный смысл, его нужно рассматривать как предел

$$I_1=\int_0^\infty e^{i(\omega-kv_z)\tau}\,d\tau=\lim_{\gamma\to 0}\int_0^\infty e^{-\gamma\tau}e^{i(\omega-kv_z)\tau}\,d\tau.$$

Как угодно малое значение γ обеспечивает сходимость интеграла на верхнем пределе.

Тогда получаем

$$\int_0^\infty e^{i(\omega-kv_z)\tau}\,d\tau=\lim_{\gamma\to 0}\frac{i}{(\omega-kv_z)+i\gamma}. \tag{33,25}$$

Мы должны теперь вычислить среднее значение от (33,25), т. е. интеграл

$$\langle I_1\rangle=\frac{i}{\sqrt{\pi}\,kv_0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}\frac{d\left(\frac{v}{v_0}\right)}{\frac{i\gamma}{kv_0}+\left(\frac{\omega}{kv_0}-\frac{v}{v_0}\right)}=\frac{i}{\sqrt{\pi}\,kv_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}\,dx}{z-x}, \tag{33,26}$$

где $x=\frac{v}{v_0}$, $z=\frac{\omega}{kv_0}+\frac{i\gamma}{kv_0}$, $v_0=\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$. Вместо v_z мы написали просто v. Воспользуемся тождеством, справедливым при $\operatorname{Im} z>0$:

$$\frac{i}{z-x}=\int_0^\infty e^{i(z-x)\alpha}\,d\alpha.$$

Тогда находим

$$\langle I_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,kv_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\int\limits_0^{\infty} e^{i(z-x)\alpha}\,dx\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,kv_0}\int\limits_0^{\infty} e^{iz\alpha-\frac{\alpha^2}{4}}\,d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x+\frac{i\alpha}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{kv_0}\int\limits_0^{\infty} e^{iz\alpha-\frac{\alpha^2}{4}}\,d\alpha = \frac{e^{-z^2}}{kv_0}\int\limits_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha}{2}-iz\right)^2}\,d\alpha =$$

$$= \frac{2e^{-z^2}}{kv_0}\left\{\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt - \int\limits_0^{-iz} e^{-t^2}\,dt\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{kv_0}\,e^{-z^2}\left(1+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{z} e^{w^2}\,dw\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{kv_0}\,e^{-z^2} + \frac{2i}{kv_0}\,e^{-z^2}\int\limits_0^{z} e^{w^2}\,dw.$$

В последней формуле можно совершить переход к пределу $\gamma \to 0$. Тогда получаем окончательно

$$\langle I_1\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{kv_0}\,e^{-\left(\frac{\omega}{kv_0}\right)^2} + \frac{2i}{kv_0}\,e^{-\left(\frac{\omega}{kv_0}\right)^2}\int\limits_0^{\frac{\omega}{kv_0}} e^{w^2}\,dw.$$

Очевидно, что $\frac{\omega}{k} = c_ф$ — фазовая скорость распространения волн, так что $z = \frac{\omega}{kv_0}$ представляет отношение этой скорости к средней скорости теплового движения электронов $\bar{v} = v_0\sqrt{2}$.

При $c_ф \gg v_0$ можно написать

$$\int\limits_0^{z} e^{w^2}\,dw = \int\limits_0^{z} e^{(z-t)^2}\,dt = e^{z^2}\int\limits_0^{z} e^{-2zt}e^{t^2}\,dt = e^{z^2}\int\limits_0^{z} e^{-2zt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!}\,dt \simeq$$

$$\simeq e^{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-2zt}\frac{t^{2n}}{n!}\,dt = \frac{e^{z^2}}{2z}\left(1+\frac{1}{2z^2}+\ldots\right), \qquad (33{,}27)$$

откуда

$$\langle I_1\rangle \cong \frac{\sqrt{\pi}}{kv_0}\,e^{-\left(\frac{\omega}{kv_0}\right)^2} + \frac{i}{\omega}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{kv_0}{\omega}\right)^2+\ldots\right]. \qquad (33{,}28)$$

Для вычисления среднего значения в формуле (33,21) воспользуемся свойством интеграла I_1, вытекающим из его определения (33,25)

$$(\omega - kv_z)\,I_1 = i$$

или

$$v_z \cdot I_1 = \frac{\omega I_1}{k} - \frac{i}{k}.$$

Аналогично,

$$(\omega - kv_z)^2 I_1 = i(\omega - kv_z)$$

или

$$v_z^2 I_1 = \frac{\omega^2 I_1}{k^2} - \frac{i\omega}{k^2} - \frac{ikv_z}{k^2}. \tag{33,29}$$

Усредняя (33,29), находим

$$\langle I_2 \rangle = \langle v_z^2 I_1 \rangle = \frac{\omega^2}{k^2} \langle I_1 \rangle - \frac{i\omega}{k^2}.$$

Подставляя значение (I_1) из (33,28) при $c_ф \gg v_0$, получаем окончательно

$$\langle I_2 \rangle \simeq \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\sqrt{\pi}}{(kv_0)} e^{-\left(\frac{\omega}{kv_0}\right)^2} + \frac{i}{\omega}\left(\frac{\omega^2}{k^2}\right)\frac{(kv_0)^2}{2\omega^2}. \tag{33,30}$$

Подставляя значение $\langle I_2 \rangle$ в (33,24), приходим к следующему закону дисперсии продольных волн:

$$1 + i\,\frac{2\sqrt{\pi}\,\omega_0^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{kv_0}\right)^3 e^{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0, \tag{33,31}$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{4\pi e^2 n}{m}$ — плазменная (ленгмюровская) частота.

В том же приближении решение уравнения (33,31) гласит:

$$\omega \simeq \omega_0(1 + i\delta), \tag{33,32}$$

где декремент затухания δ равен

$$\delta = \sqrt{\pi}\left(\frac{\omega_0}{kv_0}\right)^2 e^{-\left(\frac{\omega_0}{kv_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(kl_D)^3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{kl_D}\right)^2}, \tag{33,33}$$

где l_D — дебаевская длина.

Существование в плазме продольных волн с частотой ω_0 и фазовой скоростью $c_ф = \dfrac{\omega_0}{k}$ было установлено нами в § 46 ч. IV, где плазма рассматривалась в приближении сплошной среды. Новым результатом является затухание плазменных волн. На первый взгляд этот результат представляется парадоксальным. Выше мы видели, что диссипативные процессы были связаны с молекулярными столкновениями и возникающим при этом обменом импульсом. Найденное выше затухание плазменных волн (так называемое затухание Ландау) имеет другую природу.

Электроны в плазме могут иметь компоненту скорость v_z как меньшую, так и большую, чем фазовая скорость волны c_φ. На первые частицы действует поле опережающей их волны. Передавая импульс, волна увлекает их за собой. Наоборот, частицы, движущиеся быстрее волны, теряют импульс, отдавая его волне. Только частицы, скорость которых $v_z = c_\varphi$, находятся в резонансе с волной. Они движутся в одной фазе с волной, не теряя и не приобретая импульса. Продольная волна стремится исказить распределение Максвелла, создав максимум, отвечающий скорости v_z, равной фазовой скорости c_φ.

Известно, однако, что в ансамбле частиц, распределенных по Максвеллу, число частиц со скоростью меньше данной больше, чем число частиц со скоростью большей данной. Поэтому число частиц, увлекаемых волной, превышает число частиц, передающих импульс волне. В итоге имеет место затухание, а не раскачка продольных волн.

Формула (33,33) показывает, что затухание δ мало́ для длин волн, существенно превышающих дебаевскую длину. Наоборот, существование плазменных волн с $\lambda < l_D$ невозможно: коэффициент затухания таких волн становится большим единицы.

Это обстоятельство еще раз показывает, что продольные волны в плазме представляют коллективный эффект, связанный с кулоновским взаимодействием заряженных частиц.

Совершенно аналогичные вычисления, основанные на использовании уравнения (33,23) и выражения для $\langle I_1 \rangle$, приводят к следующему выражению для частоты поперечных волн:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k^2c^2 > \omega_0^2. \qquad (33,34)$$

Их фазовая скорость оказывается больше скорости света в пустоте:

$$c_\varphi = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{c^2k^2}}\,. \qquad (33,35)$$

Для вычисления коэффициента затухания поперечных волн следовало бы учесть релятивистские эффекты. Ясно, однако, что эффект затухания мал, поскольку фазовая скорость волн столь велика по сравнению со скоростями всех электронов в плазме, что все их можно считать покоящимися.

Мы не останавливаемся здесь на весьма важном в практическом отношении вопросе о поведении плазмы во внешнем электромагнитном поле. Метод интегрирования кинетического уравнения при наличии внешнего магнитного поля в принципе не отличается от приведенного, но требует более громоздких выкладок.

По этой же причине мы не рассматриваем задачу о плазменных волнах с учетом движения тяжелых ионов.