§ 34. Кинетическое уравнение в плазме с учетом столкновений

Рассмотрение плазмы в приближении самосогласованного поля оказывается недостаточным для описания ряда процессов в плазме.

К ним принадлежат прежде всего релаксационные процессы — установление максвелловского распределения, а также выравнивание средних энергий электронов и ионов. Приближение самосогласованного поля недостаточно также для вычисления кинетических коэффициентов диффузии, вязкости и т. п.

В достаточно разреженной плазме можно учитывать только парные соударения и пользоваться обычным кинетическим уравнением Больцмана, но с видоизмененным интегралом столкновений. Последнее обстоятельство связано со свойствами кулоновского взаимодействия. Поскольку силы кулоновского взаимодействия медленно спадают с расстоянием, основной вклад в интеграл соударений дают столкновения, при которых частицы рассеиваются на малые углы. Действительно, при кулоновском взаимодействии эффективное сечение расходится при малых углах рассеяния (см. § 43 ч. I и § 85 ч. V).

При рассеянии на малые углы изменение импульсов сталкивающихся частиц мало́. Поэтому можно сказать, что основную роль играют такие столкновения, при которых в каждом акте происходит сравнительно малый обмен импульсами. Этим можно воспользоваться для преобразования интеграла столкновений.

Удобно ввести новые переменные в выражение для интеграла столкновений:

$$I = \int w(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_2)\,[f(\boldsymbol{p}_3)\,f(\boldsymbol{p}_2) - f(\boldsymbol{p})\,f(\boldsymbol{p}_1)]\,d\boldsymbol{p}_1\,d\boldsymbol{\Omega}. \qquad (34,1)$$

Положим, что изменение импульса первой частицы

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}. \qquad (34,2)$$

Из закона сохранения импульса следует

$$\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{q}.$$

Сделаем замену переменных, положив

$$\boldsymbol{p}_2 \to \frac{\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}}{2}; \quad \boldsymbol{p}_3 \to \frac{\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_1}{2};$$

$$\boldsymbol{p}_1 \to \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_1; \quad \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}.$$

Тогда очевидно, что

$$w(\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}) \to w\left(\frac{\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_1}{2}, \frac{\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}}{2}, \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}\right) \equiv$$

$$\equiv w\left(\boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{q}}{2}; \boldsymbol{p}_1 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}; -\boldsymbol{q}; \boldsymbol{q}\right).$$

Поскольку вероятность перехода инвариантна относительно замены $\boldsymbol{q}\to(-\boldsymbol{q})$, в силу принципа детального равновесия можно просто записать

$$w(\boldsymbol{p}_3,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p})\to w\left(\boldsymbol{p}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\ \boldsymbol{p}_1-\frac{\boldsymbol{q}}{2},\ \boldsymbol{q}\right).$$

Имеем при такой замене переменных

$$f(\boldsymbol{p}_3)\,f(\boldsymbol{p}_2)=f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\,f(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q}). \tag{34,3}$$

Тогда интеграл столкновений приобретает вид

$$I=\int w(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}/2,\ \boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q}/2,\ \boldsymbol{q})\,[f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\,f(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q})-f(\boldsymbol{p}_1)\,f(\boldsymbol{p})]\,d\boldsymbol{p}_1\,d\boldsymbol{\Omega}. \tag{34,4}$$

Воспользуемся теперь тем, что относительное изменение импульса при столкновении $\boldsymbol{q}$ малó и разложим в ряд по степеням $\boldsymbol{q}$ функцию распределения f и вероятность перехода w, удерживая в разложении члены не выше второго порядка малости. При этом получаем

$$f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cong f(\boldsymbol{p})+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}\boldsymbol{q}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial p^i\,\partial p^k}q_iq_k,$$

$$f(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q})\cong f_1(\boldsymbol{p}_1)-\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{p}_1}\boldsymbol{q}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial p_1^i\,\partial p_1^k}q_iq_k,$$

$$[f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\,f(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q})-f(\boldsymbol{p}_1)\,f(\boldsymbol{p})]\cong\left(f_1\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}-f\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right)\boldsymbol{q}+$$
$$+\left(f_1\frac{\partial^2 f}{\partial p^i\,\partial p^k}+f\frac{\partial^2 f_1}{\partial p_1^i\,\partial p_1^k}-2\frac{\partial f_1}{\partial p_1^i}\frac{\partial f}{\partial p^k}\right)\frac{q_iq_k}{2},$$

$$w\left(\boldsymbol{p}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\ \boldsymbol{p}_1-\frac{\boldsymbol{q}}{2},\ \boldsymbol{q}\right)\cong w(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{p}_1)+\left(\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}-\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right)\frac{\boldsymbol{q}}{2}=$$
$$=w+\left(\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}-\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right)\frac{\boldsymbol{q}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в интеграл столкновений, находим

$$I=\int w\left(f_1\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}-f\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right)\boldsymbol{q}\,d\boldsymbol{p}_1\,d\boldsymbol{\Omega}+\int\frac{\partial w}{\partial p^i}\left(f_1\frac{\partial f}{\partial p^k}-f\frac{\partial f_1}{\partial p_1^k}\right)\frac{q_iq_k}{2}\,d\boldsymbol{p}_1\,d\boldsymbol{\Omega}-$$
$$-\int\frac{\partial w}{\partial p_1^i}\left(f_1\frac{\partial f}{\partial p^k}-f\frac{\partial f_1}{\partial p_1^k}\right)\frac{q_iq_k}{2}\,d\boldsymbol{p}_1\,d\boldsymbol{\Omega}+$$
$$+\int w\left(f_1\frac{\partial^2 f}{\partial p^i\,\partial p^k}+f\frac{\partial^2 f_1}{\partial p_1^i\,\partial p_1^k}-2\frac{\partial f_1}{\partial p_1^i}\cdot\frac{\partial f}{\partial p^k}\right)\frac{q_iq_k}{2}\,d\boldsymbol{p}_1\,d\boldsymbol{\Omega}. \tag{34,5}$$

В силу четности функции w относительно замены $\boldsymbol{q}\to-\boldsymbol{q}$ и нечетности подынтегрального выражения в первом интеграле, он обращается в нуль.

Третий интеграл можно преобразовать интегрированием по частям:

$$\int \frac{\partial w}{\partial p_1^i}\left(f_1 \frac{\partial f}{\partial p^k} - f \frac{\partial f_1}{\partial p_1^k}\right)\frac{q_i q_k}{2}\, d\boldsymbol{p}_1\, d\Omega =$$
$$= -\int w \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_1^k}\frac{\partial f}{\partial p^k} - f \frac{\partial^2 f_1}{\partial p_1^i \partial p_1^k}\right)\frac{q_i q_k}{2}\, d\boldsymbol{p}_1\, d\Omega. \quad (34,6)$$

Поскольку функция распределения быстро уменьшается с ростом аргумента, проинтегрированные члены обращаются в нуль при $|\boldsymbol{p}_1| \to \infty$.

Подставляя (34,6) в (34,5), находим для интеграла столкновений:

$$I = \int \left\{ \frac{\partial w}{\partial p^i}\left(f_1 \frac{\partial f}{\partial p^k} - f \frac{\partial f_1}{\partial p_1^k}\right) - w\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_1^i}\frac{\partial f}{\partial p^k} - f\frac{\partial^2 f_1}{\partial p_1^i \partial p_1^k}\right) + \right.$$
$$\left. + w\left(f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial p^i \partial p^k} + f \frac{\partial^2 f_1}{\partial p_1^i \partial p_1^k} - 2\frac{\partial f_1}{\partial p_1^i}\frac{\partial f}{\partial p^k}\right)\right\}\frac{q_i q_k}{2}\, d\boldsymbol{p}_1\, d\Omega =$$
$$= \int \left\{ \frac{\partial w}{\partial p^i}\left(f_1 \frac{\partial f}{\partial p^k} - f \frac{\partial f_1}{\partial p_1^k}\right) - w \frac{\partial f_1}{\partial p_1^i}\frac{\partial f}{\partial p^k} + w f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial p^i \partial p^k}\right\}\frac{q_i q_k}{2}\, d\boldsymbol{p}_1\, d\Omega =$$
$$= \int \left\{ \frac{\partial}{\partial p^i}\left[w\left(f_1 \frac{\partial f}{\partial p^k} - f\frac{\partial f_1}{\partial p_1^k}\right)\right]\right\}\frac{q_i q_k}{2}\, d\boldsymbol{p}_1\, d\Omega =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial p^i}\int w\left(f\frac{\partial f_1}{\partial p_1^k} - f_1 \frac{\partial f}{\partial p^k}\right)\frac{q_i q_k}{2}\, d\boldsymbol{p}_1\, d\Omega = -\frac{\partial j_i}{\partial p^i}, \quad (34,7)$$

где введено обозначение:

$$j_i = \int w\left(f\frac{\partial f_1}{\partial p_1^k} - f_1\frac{\partial f}{\partial p^k}\right)\frac{q_i q_k}{2}\, d\boldsymbol{p}_1\, d\Omega. \quad (34,8)$$

Мы свели интеграл столкновений к дивергенции вектора j_i, представляющего поток в пространстве импульсов. Смысл этого результата становится понятным, если учесть результаты § 10. При изменении переменной, в данном случае импульса, малыми порциями, изменение функции распределения сводится к потоку в соответствующем пространстве, в нашем случае в пространстве импульсов.

Кинетическое уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,\frac{\partial f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, t)}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{F}}{m}\,\frac{\partial f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, t)}{\partial \boldsymbol{p}} = -\frac{\partial j_i}{\partial p^i}. \quad (34,9)$$

Это уравнение именуется кинетическим уравнением Ландау. Очевидно, что кинетическое уравнение Ландау является частным случаем уравнения медленных процессов (уравнения Фоккера — Планка). В данном случае медленным процессом является обмен импульсами между частицами с кулоновским взаимодействием.

Дальнейшее упрощение выражения для потока импульса получается, если провести интегрирование по углам. Для этого мы воспользуемся тем, что главную роль играют далекие столкновения, при которых отклонение происходит на малые углы.

Введем тензор

$$\alpha_{ik} = \int w \frac{q_i q_k}{2} \, d\Omega. \tag{34,10}$$

С помощью этого тензора выражение для j_i можно представить в виде

$$j_i = \int \alpha_{ik} \left(f \frac{\partial f_1}{\partial p_1^k} - f_1 \frac{\partial f}{\partial p^k} \right) d\boldsymbol{p}_1. \tag{34,11}$$

Изменение импульса при отклонении на малые углы было вычислено нами в § 43 ч. I. Если выбрать направление относительной скорости двух сталкивающихся частиц за ось x-ов, то имеем очевидно, что

$$q_x = 0; \quad q_y = q_z = \int \frac{\partial}{\partial y} \frac{e_1 e_2}{r} \, dt = \frac{2 e_1 e_2}{\rho v_{\text{отн}}}, \tag{34,12}$$

где ρ — прицельный параметр и e_1, e_2 — заряды частиц. В общем случае вектор $\boldsymbol{q}$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{q} = \frac{2 e_1 e_2}{\rho^2 v_{\text{отн}}} \boldsymbol{\rho}. \tag{34,13}$$

При этом очевидно, что вектор $\boldsymbol{\rho}$ перпендикулярен к вектору относительной скорости $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$. Пользуясь (34,13), запишем (34,10) в виде

$$\alpha_{ik} = \frac{2 (e_1 e_2)^2}{v_{\text{отн}}^2} \int \frac{w \rho_i \rho_k}{\rho^4} \, d\Omega. \tag{34,14}$$

Вероятность столкновения w с рассеянием в угол $d\Omega$ можно записать в виде

$$w \, d\Omega = dw = v_{\text{отн}} \rho \, d\rho \, d\varphi, \tag{34,15}$$

где φ — азимутальный угол столкновения (угол, определяющий ориентацию вектора $\boldsymbol{\rho}$ в плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$).

Учитывая это значение w и (34,14), получаем

$$\alpha_{ik} = \frac{2 (e_1 e_2)^2}{v_{\text{отн}}} \int \frac{\rho_i \rho_k}{\rho^3} \, d\varphi \, d\rho.$$

В выбранной нами системе координат можно, очевидно, написать

$$\rho_x = 0; \quad \rho_y = \rho \sin \varphi; \quad \rho_z = \rho \cos \varphi.$$

Поэтому для компонент α_{ik} получаем окончательно

$$\alpha_{xx} = \alpha_{xy} = \alpha_{xz} = \alpha_{yz} = 0, \quad \alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \frac{2\pi (e_1 e_2)^2}{v_{\text{отн}}} \int \frac{d\rho}{\rho}. \tag{34,16}$$

Интеграл по прицельным расстояниям логарифмически расходится как на верхнем, так и на нижнем пределе. Пределы интегрирования — значения параметра $\rho_{\max}$ и $\rho_{\min}$, — можно определить из следующих соображений: при далеких пролетах, когда ρ превышает дебаевскую длину l_D, заряженные частицы экранированы и практически не взаимодействуют. Поэтому можно положить верхний предел $\rho_{\max} \simeq l_D$.

Нижний предел определяется из условия, чтобы углы рассеяния не были слишком велики. Именно, если кинетическая энергия $\mu \frac{v_{\text{отн}}^2}{2}$ велика по сравнению с потенциальной $\frac{e_1 e_2}{\rho}$, то отклонения сравнительно малы.

Граница области малых отклонений определяется условием

$$\frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2} \sim \frac{e_1 e_2}{\rho_{\min}}$$

или

$$\rho_{\min} \sim \frac{2 e_1 e_2}{\mu v_{\text{отн}}^2}.$$

Таким образом, окончательно

$$\alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \frac{2\pi (e_1 e_2)^2}{v_{\text{отн}}} \ln \frac{\mu v_{\text{отн}}^2 l_D}{2 (e_1 e_2)}.$$

Следует заметить, что величина, стоящая под логарифмом, очень велика, так что числовое значение самого логарифма не очень чувствительно к определению параметров $\rho_{\max}$ и $\rho_{\min}$.

В произвольной системе координат α_{ik} записывают в виде

$$\alpha_{ik} = 2\pi (e_1 e_2)^2 \frac{v_{\text{отн}}^2 \delta_{ik} - v_{\text{отн}}^i v_{\text{отн}}^k}{v_{\text{отн}}^3} \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}. \tag{34,17}$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial r_k} + \frac{F_k}{m} \frac{\partial f}{\partial p^k} =$$

$$= -2\pi (e_1 e_2)^2 \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \frac{\partial}{\partial p^i} \int \frac{v_{\text{отн}}^2 \delta_{ik} - v_{\text{отн}}^i v_{\text{отн}}^k}{v_{\text{отн}}^3} \left(f \frac{\partial f_1}{\partial p_1^k} - f_1 \frac{\partial f}{\partial p^k} \right) dp_1. \tag{34,18}$$

В плазме, всегда состоящей из нескольких сортов частиц, уравнения Ландау следует записать для функции распределения каждого сорта частиц.

Заметим прежде всего, что в состоянии равновесия уравнение Ландау допускает решение в виде распределения Максвелла

$$f = \mathrm{const}\, e^{-p^2/2mkT}. \qquad (34,19)$$

Действительно, при подстановке (34,19) в уравнение Ландау его левая часть обращается в нуль.

В правой части имеем:

$$\int \frac{v_{\text{отн}}^2 \delta_{ik} - v_{\text{отн}}^i v_{\text{отн}}^k}{v_{\text{отн}}^3} \left(f \frac{\partial f_1}{\partial p_1^k} - f_1 \frac{\partial f}{\partial p^k} \right) dp_1 =$$

$$= \int \frac{v_{\text{отн}}^2 \delta_{ik} - v_{\text{отн}}^i v_{\text{отн}}^k}{v_{\text{отн}}^3} \left(\frac{p_1^k - p^k}{mkT} \right) f f_1 \, dp_1 = \frac{1}{kT} \int \frac{v_{\text{отн}}^k \delta_{ik} - v_{\text{отн}}^i}{v_{\text{отн}}} f f_1 \, dp_1.$$

Ясно, однако, что

$$v_{\text{отн}}^k \delta_{ik} - v_{\text{отн}}^i = 0.$$

Таким образом, распределение Максвелла является решением уравнения Ландау для случая равновесия. Можно показать, что из уравнения Ландау следует H-теорема. Поэтому распределение Максвелла является тем единственным распределением, которое устанавливается в равновесной плазме. Наконец, из уравнения Ландау вытекают уравнения гидродинамики плазмы и могут быть найдены соответствующие кинетические коэффициенты. Мы не можем, однако, останавливаться на этих довольно громоздких вычислениях.

§ 35. Установление равновесия в электронно-ионной плазме

Благодаря существенному различию в массах ионов и электронов электронно-ионная плазма представляет классический пример системы, могущей находиться в состоянии неполного равновесия.

Столкновения между ионами приводят к установлению равновесного максвелловского распределения с некоторой температурой $T^{(i)}$ за время τ_i. Аналогично, за время τ_e установится равновесное распределение электронов, которым, согласно сказанному в предыдущем параграфе, также служит максвелловское распределение. Однако температура электронов будет иметь другое значение $T^{(e)}$, причем $T^{(e)} \gg T^{(i)}$.

Плазма с различными температурами ионов и электронов находится в состоянии неполного равновесия. По прошествии