В плазме, всегда состоящей из нескольких сортов частиц, уравнения Ландау следует записать для функции распределения каждого сорта частиц.

Заметим прежде всего, что в состоянии равновесия уравнение Ландау допускает решение в виде распределения Максвелла

$$f = \text{const}\, e^{-p^2/2mkT}. \tag{34,19}$$

Действительно, при подстановке (34,19) в уравнение Ландау его левая часть обращается в нуль.

В правой части имеем:

$$\int \frac{v_{\text{отн}}^2 \delta_{ik} - v_{\text{отн}}^i v_{\text{отн}}^k}{v_{\text{отн}}^3} \left(f \frac{\partial f_1}{\partial p_1^k} - f_1 \frac{\partial f}{\partial p^k} \right) dp_1 =$$
$$= \int \frac{v_{\text{отн}}^2 \delta_{ik} - v_{\text{отн}}^i v_{\text{отн}}^k}{v_{\text{отн}}^3} \left(\frac{p_1^k - p^k}{mkT} \right) f f_1 \, dp_1 = \frac{1}{kT} \int \frac{v_{\text{отн}}^k \delta_{ik} - v_{\text{отн}}^i}{v_{\text{отн}}} f f_1 \, dp_1.$$

Ясно, однако, что

$$v_{\text{отн}}^k \delta_{ik} - v_{\text{отн}}^i = 0.$$

Таким образом, распределение Максвелла является решением уравнения Ландау для случая равновесия. Можно показать, что из уравнения Ландау следует H-теорема. Поэтому распределение Максвелла является тем единственным распределением, которое устанавливается в равновесной плазме. Наконец, из уравнения Ландау вытекают уравнения гидродинамики плазмы и могут быть найдены соответствующие кинетические коэффициенты. Мы не можем, однако, останавливаться на этих довольно громоздких вычислениях.

§ 35. Установление равновесия в электронно-ионной плазме

Благодаря существенному различию в массах ионов и электронов электронно-ионная плазма представляет классический пример системы, могущей находиться в состоянии неполного равновесия.

Столкновения между ионами приводят к установлению равновесного максвелловского распределения с некоторой температурой $T^{(i)}$ за время τ_i. Аналогично, за время τ_e установится равновесное распределение электронов, которым, согласно сказанному в предыдущем параграфе, также служит максвелловское распределение. Однако температура электронов будет иметь другое значение $T^{(e)}$, причем $T^{(e)} \gg T^{(i)}$.

Плазма с различными температурами ионов и электронов находится в состоянии неполного равновесия. По прошествии времени $\tau \gg \tau_i$, τ_e в плазме установится полное равновесие с общей температурой для обоих сортов частиц.

Это равновесие устанавливается путем передачи энергии от электронов к ионам. Время релаксации τ определяется равенством

$$\frac{\overline{d\varepsilon^{(i)}}}{dt} = Q^{(e\to i)}, \tag{35,1}$$

где $\overline{\varepsilon^{(i)}} = \frac{3}{2} kT_i$ — средняя энергия ионов и $Q^{(e\to i)}$ — поток энергии от электронов к ионам.

Очевидно, что

$$\frac{\overline{d\varepsilon^{(i)}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int \varepsilon^{(i)} f^{(i)}\, d\boldsymbol{p}^{(i)} = \int \varepsilon^{(i)} \frac{\partial f^{(i)}}{\partial t}\, d\boldsymbol{p}^{(i)},$$

поскольку функция распределения ионов $f^{(i)}$ не зависит от координат. Согласно (34,9) функция распределения удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f^{(i)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial p_k^{(i)}} j_k^{(e,\,i)}. \tag{35,2}$$

Интеграл столкновений $j_k^{(i,\,i)} = 0$, поскольку между ионами существует равновесие.

Подставляя (35,2) в (35,1) и интегрируя по частям, имеем

$$\frac{\overline{d\varepsilon^{(i)}}}{dt} = -\int \varepsilon^{(i)} \frac{\partial j_k^{(e,\,i)}}{\partial p_k^{(i)}}\, d\boldsymbol{p}^{(i)} = \int v_k^{(i)} j_k^{(e,\,i)}\, d\boldsymbol{p}^{(i)}. \tag{35,3}$$

Поток импульса от электронной к ионной компоненте может быть записан, согласно (34,11), в виде

$$j_k^{(e,\,i)} = \int \alpha_{kj}\left(f_0^{(e)} \frac{\partial f_0^{(i)}}{\partial p_j^{(i)}} - f_0^{(i)} \frac{\partial f_0^{(e)}}{\partial p_j^{(e)}}\right) d\boldsymbol{p}^{(e)}. \tag{35,4}$$

Поскольку $f_0^{(e)}$ и $f_0^{(i)}$ — равновесные функции распределения с температурами $T^{(e)}$ и $T^{(i)}$, находим

$$j_k^{(e,\,i)} = \int \alpha_{jk} f_0^{(e)} f_0^{(i)} \left(\frac{v_j^{(i)}}{kT^{(i)}} - \frac{v_j^{(e)}}{kT^{(e)}}\right) d\boldsymbol{p}^{(e)}. \tag{35,5}$$

Введем относительную скорость

$$v_{\text{отн}}^{j} = v_j^{(e)} - v_j^{(i)}.$$

Тогда

$$j_k^{(e,\,i)} = \int \alpha_{kj} f_0^{(e)} f_0^{(i)} \left\{ v_j^{(i)} \left(\frac{1}{kT^{(i)}} - \frac{1}{kT^{(e)}} \right) - \frac{v_{\text{отн}}^{i}}{kT^{(e)}} \right\} dp^{(e)}.$$

Имеем, однако,

$$\alpha_{kj} v_{\text{отн}}^{j} \simeq v_{\text{отн}}^{j} v_{\text{отн}}^{2} \delta_{kj} - v_{\text{отн}}^{2} v_{\text{отн}}^{k} = 0.$$

Поэтому находим

$$j_k^{(e,\,i)} = \frac{2\pi e^4 Z^2}{k} \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \left(\frac{1}{T^{(i)}} - \frac{1}{T^{(e)}} \right) \int f_0^{(i)} f_0^{(e)} v_j^{(i)} \frac{v_{\text{отн}}^{2} \delta_{kj} - v_{\text{отн}}^{k} v_{\text{отн}}^{j}}{v_{\text{отн}}^{3}} \, dp^{(e)}.$$

Поскольку скорость электронов велика по сравнению со скоростями ионов, можно положить

$$v_{\text{отн}} \simeq v^{(e)}.$$

Тогда окончательно

$$j_k^{(e,\,i)} = \frac{2\pi e^4 Z^2}{k} \frac{T^{(e)} - T^{(i)}}{T^{(i)} T^{(e)}} \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \int f_0^{(i)} f_0^{(e)} \frac{\delta_{kj} (v^{(e)})^2 - v_k^{(e)} v_j^{(e)}}{(v^{(e)})^3} v_j^{(i)} \, dp^{(e)}. \tag{35,6}$$

Подставляя $j_k^{(e,\,i)}$ из (35,6) и (35,3), получаем

$$\overline{\frac{d\varepsilon^{(i)}}{dt}} = \int v_k^{(i)} j_k^{(e,\,i)} \, dp^{(i)} =$$

$$= 2\pi \frac{e^4 Z^2}{k} \frac{T^{(e)} - T^{(i)}}{T^{(i)} T^{(e)}} \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \int f_0^{(e)} f_0^{(i)} v_k^{(i)} v_j^{(i)} \frac{(v^{(e)})^2 \delta_{kj} - v_k^{(e)} v_j^{(e)}}{(v^{(e)})^3} \, dp^{(e)} \, dp^{(i)}. \tag{35,7}$$

Имеем, очевидно,

$$v_k^{(i)} v_j^{(i)} (v^{(e)})^2 \delta_{kj} = (v^{(i)})^2 (v^{(e)})^2.$$

Кроме того, ввиду сферической симметрии $f_0^{(i)}$ и $f_0^{(e)}$,

$$\left\langle v_k^{(e)} v_j^{(e)} \right\rangle \left\langle v_k^{(i)} v_j^{(i)} \right\rangle = 0 \quad \text{при} \quad k \neq j.$$

Поэтому окончательно

$$\overline{\frac{d\varepsilon^{(i)}}{dt}} = 2\pi \frac{e^4 Z^2}{k} \frac{T^{(e)} - T^{(i)}}{T^{(i)} T^{(e)}} \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \cdot \int \frac{(v^{(i)})^2}{v^{(e)}} f_0^{(e)} f_0^{(i)} \, dp^{(e)} \, dp^{(i)}.$$

Дальнейшие выкладки сводятся к простому усреднению по распределениям Максвелла ионов и электронов:

$$\left\langle (v^{(i)})^2 \right\rangle = \frac{3kT^{(i)}}{m^{(i)}}, \qquad \left\langle \frac{1}{v^{(e)}} \right\rangle = 2 \left(\frac{m^{(e)}}{2\pi k T^{(e)}} \right)^{1/2}.$$

Итак, для $\dfrac{\overline{d\varepsilon^{(i)}}}{dt}$ получаем

$$\frac{\overline{d\varepsilon^{(i)}}}{dt}=2\pi\frac{N^2e^4Z^2}{k}\ln\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\frac{T^{(e)}-T^{(i)}}{T^{(i)}T^{(e)}}\cdot\frac{3kT^{(i)}}{m^{(i)}}\cdot 2\left(\frac{m^{(e)}}{2\pi kT^{(e)}}\right)^{1/2}$$

или

$$\frac{dT^{(i)}}{dt}=\frac{T^{(e)}-T^{(i)}}{\tau},$$

где время релаксации

$$\tau=\frac{3m^{(i)}}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{m^{(e)}}}\frac{\left(kT^{(e)}\right)^{3/2}}{NZ^2e^4\ln\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}}.$$