§ 53. Диамагнетизм электронного газа

Оказывается, однако, что наряду со спиновым парамагнетизмом электронный газ обнаруживает орбитальный диамагнетизм.

Орбитальный диамагнетизм, открытый Ландау, не имеет столь наглядного характера, как спиновый парамагнетизм. Для вычисления магнитной восприимчивости, связанной с орбитальным движением, необходимо найти свободную энергию электронного газа в магнитном поле. Для этого в свою очередь следует найти энергию свободного электрона в однородном магнитном поле.

Рассмотрим решение уравнения Паули в простейшем случае движения свободного электрона в однородном магнитном поле. Выберем направление поля за ось z и представим вектор-потенциал в виде[1])

$$A_x = -Hy; \qquad A_y = A_z = 0.$$

Уравнение Паули для стационарного движения можно написать в виде

$$\left\{\frac{1}{2m}\left(p_x + \frac{e}{c}Hy\right)^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{e}{mc}s_zH\right\}\psi = E\psi. \tag{53,1}$$

Из уравнения (53,1) следует прежде всего, что координатная и спиновая волновые функции являются независимыми.

Оператор вида const s_z не действует на переменные (x, y, z), так что уравнению (53,1) удовлетворяет волновая функция вида

$$\psi = \varphi(s_z)\Phi(x, y, z). \tag{53,2}$$

Поскольку координаты x и z в уравнение (53,1) явно не входят, можно попытаться искать решение его в виде

$$\Phi = e^{i/\hbar\,(p_x x + p_y z)}\,\zeta(y). \tag{53,3}$$

Компоненты импульса p_x и p_z в направлении осей x и z сохраняются:

$$p_xH - Hp_x = 0, \qquad p_zH - Hp_z = 0$$

и могут пробегать непрерывный ряд значений.

Подставляя (53,3) в уравнение (53,1), получаем

$$\frac{\hbar^2}{2m}\zeta''(y) + \left(E_\perp - \frac{m\omega^2}{2}(y - y_0)^2\right)\zeta(y) = 0, \tag{53,4}$$

---

[1]) Это представление вектора-потенциала для наших целей удобнее, чем (19,16) ч. I. Ясно, что оба выражения равноправны.

где обозначено

$$\left.\begin{aligned} E_\perp &= E - \frac{p_z^2}{2m} + \mu_0 s_z H, \\ \omega &= \frac{eH}{mc}, \\ y_0 &= -\frac{cp_x}{eH}. \end{aligned}\right\} \tag{53,5}$$

Уравнение (53,4) формально совпадает с уравнением движения линейного гармонического осциллятора с частотой ω (равной циклотронной частоте), колеблющегося около положения равновесия y_0. Поэтому, не повторяя выкладок § 10 ч. V, можно написать

$$E_\perp = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{53,6}$$

или

$$E = \frac{eH}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m} - \mu_0 s_z H = 2\mu_0\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m} - \mu_0 s_z H \tag{53,7}$$

и

$$\zeta(y) = H_n[\omega(y - y_0)]\, e^{-\frac{|e|H}{2c\hbar}(y-y_0)^2}, \tag{53,8}$$

где H_n — полиномы Эрмита.

Поскольку полиномы H_n быстро уменьшаются с ростом $\omega(y - y_0)$ и становятся малыми при $(y - y_0) > \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ [ср. (10,2) и (10,15) ч. V], в однородном магнитном поле частица свободно движется в направлении оси z и совершает движение в ограниченной области

$$y_0 - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \leqslant y \leqslant y_0 + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \tag{53,9}$$

Движение в ограниченной области соответствует классическому движению заряда по окружности с циклотронной частотой.

Движению вдоль поля отвечает энергия $\frac{p_z^2}{2m}$, движению в плоскости (x, y) — квантованная энергия $E_\perp$.

Энергия электрона не зависит от значений импульса p_x, так что состояния являются вырожденными.

Мы применим эти результаты к движению электрона в области пространства, ограниченной вдоль оси y. При этом компонента импульса p_x, в отличие от компоненты p_z, не может принимать произвольных значений. Действительно, положение точки «равновесия» y_0 не может выйти за пределы размеров области в направлении оси y. Поэтому из (53,5) следует, что

$$0 \leqslant p_x \leqslant \frac{eH}{c} L. \tag{53,10}$$

Зная энергию отдельного электрона, которая слагается из двух независимых частей — энергии орбитального движения и энергии, связанной с собственным магнитным моментом, мы можем написать свободную энергию электронного газа. Именно, мы можем положить:

$$F = F_0 + F_s + F_{\text{орб}}, \tag{53,11}$$

где F_0 — свободная энергия в отсутствие поля, F_s — часть свободной энергии, обусловленная спиновым магнитным моментом и найденная выше, а F_{orb} — вклад в свободную энергию орбитального движения

$$F_{\text{orb}} = -kT \int d\gamma' \sum_i \Omega_i \ln \left[1 + \exp\left\{ \frac{\mu - 2\mu_0 H\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{p_z^2}{2m}}{kT} \right\} \right]. \tag{53,12}$$

Своеобразие рассматриваемой системы заключается в том, что импульс p_z в направлении поля изменяется непрерывно, тогда как движение в плоскости (xy) квантовано. Поэтому по импульсу производится интегрирование, причем $d\gamma' = \frac{dz\, dp_z}{(2\pi\hbar)^3}$. При данной энергии ε_n состояния орбитального движения в плоскости (xy) вырождены. Кратность вырождения $\Omega(\varepsilon_n)$ равна

$$\Omega(\varepsilon_n) = 2 \cdot \frac{dx\, dy}{(2\pi\hbar)^2} 2\pi \int p_\perp\, dp_\perp = \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^2} \left(\int dx\, dy \right) p_\perp \Big|_{p_1}^{p_2},$$

где импульс p_1 отвечает движению в плоскости xy при данной энергии $E_\perp$.

Иными словами, можно сказать, что кратность вырождения уровня энергии $E_\perp$ определяется большим, но дискретным (при конечном размере металлического образца в направлении x) числом возможных значений p_x.

Написав очевидное соотношение

$$2\mu_0 H n < \frac{p_\perp^2}{2m} < 2\mu_0 H \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

мы видим, что $p_\perp$ может изменяться (при данном $E_\perp$) в интервале от

$$p_1 = \sqrt{4m\mu_0 H} \quad \text{до} \quad p_2 = \sqrt{4m\mu_0 H \left(n + \frac{1}{2} \right)}.$$

Отсюда находим

$$\Omega(\varepsilon_n) = \frac{4\pi m \mu_0 H}{(2\pi\hbar)^2} \int dx\, dy. \tag{53,13}$$

Тот же результат следует из (53,10)

Подставляя в (53,12) значения $d\gamma'$ и $\Omega(\varepsilon_n)$, находим

$$F_{\text{orb}} = -kT\,\frac{4\pi m\mu_0 HV}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_z \sum_{n=0}^{\infty} \ln\left[1+\exp\frac{\mu-2\mu_0 H\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{p_z^2}{2m}}{kT}\right]. \tag{53,14}$$

Рассмотрим случай слабых полей, когда выполнено неравенство (52,5). В этом случае логарифмическая функция аргумента $\frac{\mu_0 H}{kT}$ мало изменяется при изменении n на $n+\frac{1}{2}$. Поэтому суммирование можно заменить интегрированием по формуле Эйлера

$$\sum_{n=0}^{\infty} f\left(n+\frac{1}{2}\right) \simeq \int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx - \frac{1}{24} f'(x)\Big|_0^{\infty}.$$

С помощью формулы Эйлера находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left[1+\exp\left\{\frac{\mu-2\mu_0 H\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{p_z^2}{2m}}{kT}\right\}\right] \simeq$$

$$\simeq \int\limits_0^{\infty} dx \ln\left[1+\exp\left\{\frac{\mu-2\mu_0 Hx-\frac{p_z^2}{2m}}{kT}\right\}\right] - \frac{1}{24}\,\frac{2\mu_0 H}{kT}\,\frac{1}{e^{\frac{p_z^2/2m-\mu}{kT}}-1},$$

откуда

$$F_{\text{orb}} = -kT\,\frac{4\pi m\mu_0 HV}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_z \int\limits_0^{\infty} dx \ln\left[1+\exp\left\{\frac{\mu-2\mu_0 Hx-\frac{p_z^2}{2m}}{kT}\right\}\right] + \frac{\mu_0 H}{3}\,\frac{\pi m\mu_0 HV}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{e^{\frac{p_z^2/2m-\mu}{kT}}+1}. \tag{53,15}$$

В первом интеграле введем новую переменную $u=2\mu_0 Hx$, а во втором положим $\varepsilon=\frac{p_z^2}{2m}$. Тогда без труда найдем

$$F_{\text{orb}} = -\frac{kT\,(2\pi)\,(2m)^{3/2}\,V}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_z \int\limits_0^{\infty} du \ln\left[1+\exp\left\{\frac{\mu-u-p_z^2/2m}{kT}\right\}\right] + \frac{\pi}{6}\,\frac{(2m)^{3/2}(\mu_0 H)^2 V}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}. \tag{53,16}$$

Первое слагаемое в (53,16) не зависит от магнитного поля и не дает вклада в магнитную восприимчивость. Интеграл во втором слагаемом для сильно вырожденного электронного газа можно согласно (80,7) ч. III написать так:

$$\int \frac{(\varepsilon)^{-1/2}\, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} \simeq 2\sqrt{\mu}\,.$$

Восприимчивость электронного газа, связанная с орбитальным движением, оказывается равной

$$\chi_{\mathrm{orb}} = -\frac{1}{VH}\frac{\partial F_{\mathrm{orb}}}{\partial H} = -\frac{4\pi(2m)^{3/2}\mu_0^2\sqrt{\mu}}{3(2\pi\hbar)^3}\,. \tag{53,17}$$

Мы видим, что орбитальная магнитная восприимчивость отрицательна, т. е. отвечает диамагнетизму электронного газа.

Сравнивая (53,17) и (53,8), легко убедиться, что

$$|\chi_{\mathrm{orb}}| = \frac{1}{3}\chi_s.$$

Поэтому полная восприимчивость электронного газа оказывается равной

$$\chi = \frac{2}{3}\chi_s = \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{3(2\pi\hbar)^3}\mu_0^2\sqrt{\mu}\,. \tag{53,18}$$

Оказывается, что это значение χ хорошо согласуется с опытными данными.

Более подробное рассмотрение, связанное с учетом влияния кристаллической решетки, не изменяет общего результата. Подчеркнем, что при вычислении диамагнитной восприимчивости мы считали магнитное поле слабым. В сильных магнитных полях, когда неравенство (52,5) не выполняется, магнитная восприимчивость оказывается функцией напряженности поля. Эта функция имеет осциллирующий характер (эффект де Гааза — Ван Альфена). Эти осцилляции связаны с изменением с полем энергии $E_\perp$ и соответствующим изменением заполнения уровня Ферми [1]).

§ 54. Ферромагнетизм

Ферромагнитные свойства, как было подчеркнуто в ч. IV, обнаруживаются только у сравнительно небольшого числа металлов в кристаллическом состоянии. Именно, ферромагнитными оказываются только металлы с незаполненными внутренними оболочками и некоторые сплавы.

---

[1]) См., например, Д. Займан, Принципы теории твердого тела, «Мир», 1966.