Соотношение (57,8) представляет линеризованное уравнение Больцмана, весьма близкое по своей структуре к уравнению (27,3).

Заметим, что в стационарном состоянии при отсутствии внешних сил и в однородной системе уравнение (57,8) превращается в

$$f(p)(1-f(p'))-f(p')(1-f(p))=0. \tag{57,9}$$

С учетом изотропии, когда функция распределения зависит только от абсолютной величины импульса, что то же самое, от энергии решением этого функционального уравнения служит распределение Ферми:

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}. \tag{57,10}$$

Рассмотрение широкого класса кинетических явлений может быть проведено без конкретизации вида функции $F(\alpha)$. Поэтому мы в последующих параграфах будем считать $F(\alpha)$ некоторой заданной функцией. При этом мы получим решение кинетического уравнения теми же методами, что в классической кинетической теории газов. Затем, пользуясь выражениями для вероятностей перехода (56,9) и (56,10), мы найдем время релаксации или длину свободного пробега. Наконец, чтобы убедиться в точности этих приближений, мы проведем в § 62 последовательную запись и решение уравнения Больцмана в металле.

В случае слабых полей и малых отклонений от равновесного состояния, так же как в (24,3), будем пытаться искать решение (57,8) в виде

$$f=f_0(\varepsilon)+f_1(p,\ \Omega,\ t), \tag{57,11}$$

где $f_0 \gg f_1$.

При этом для f_1 получаем уравнение, совпадающее с уравнением (27,10):

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+v\left\{(\varepsilon-\mu)\nabla\left(\frac{1}{kT}\right)-\nabla\left(\frac{\mu}{kT}\right)+e\mathscr{E}\right\}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}+$$
$$+\frac{e}{c}[vH]\frac{\partial f_1}{\partial p}+v\,\frac{\partial f_1}{\partial r}=\int(f_1'-f_1)F(\alpha)\,d\Omega'. \tag{57,12}$$

§ 58. Электропроводность металлов

Если к металлу приложено постоянное электрическое поле $\mathscr{E}$, то в нем будет существовать стационарный ток. Необходимо ясно представить себе, почему движение электронов проводимости оказывается стационарным. Если бы интеграл столкновений в уравнении (57,8) можно было опустить, то оно приобрело бы вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}+e\mathscr{E}\frac{\partial f}{\partial p}=0$$

и функция распределения зависела бы от времени. Фактически это означало бы, что электроны двигались ускоренно под действием силы $e\mathscr{E}$. Их скорость, а значит, и ток непрерывно нарастал во времени.

Источником потерь импульса, компенсирующим ускоряющее действие поля, служат столкновения электронов с фононами или примесями.

Только учитывая интеграл столкновений, можно написать уравнение Больцмана для функции распределения, не зависящей от времени.

Не повторяя выкладок § 27, можно написать для плотности тока выражение

$$\boldsymbol{j}=e\int \boldsymbol{v}f_1\,d\boldsymbol{p}=-\frac{e^2}{m}\int \lambda_{tr}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\frac{\boldsymbol{p}}{v}(\boldsymbol{v}\mathscr{E})\,d\boldsymbol{p}. \tag{58,1}$$

Таким образом, электропроводность оказывается равной

$$\sigma_{ik}=-\frac{e^2}{m}\int \lambda_{tr}\frac{v_i}{v}p_k\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\,d\boldsymbol{p}. \tag{58,2}$$

В кристаллах с кубической симметрией поле $\mathscr{E}$ и ток $\boldsymbol{j}$ параллельны друг другу.

Выбирая направления вектора $\mathscr{E}$ на ось x, можно переписать (58,1) в виде

$$j=-e^2\mathscr{E}\int \lambda_{tr}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right)v\cos^2\theta\,d\boldsymbol{p}, \tag{58,3}$$

где θ — угол между векторами $\boldsymbol{v}$ и $\mathscr{E}$.

В формуле (58,3) можно перейти к интегрированию по энергиям и по углам.

Это дает

$$\sigma=\frac{16\pi e^2m}{3(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \lambda_{tr}\varepsilon\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\,d\varepsilon. \tag{58,4}$$

Воспользуемся теперь свойством функции $\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$ для распределения Ферми в металле, рассмотренным в § 80 ч. III.

Имеем, аналогично (80,5) ч. III,

$$L_1=\int \lambda_{tr}\varepsilon\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\,d\varepsilon\approx\int_{-\frac{\mu}{kT}}^{\infty}\lambda_{tr}(\mu+kTx)\frac{\partial f_0}{\partial x}\,dx\approx\int_{-\infty}^{\infty}\lambda_{tr}(\mu+kTx)\frac{\partial f_0}{\partial x}\,dx,$$

где $x=\frac{\varepsilon-\mu}{Tk}$.

Если длина свободного пробега λ_{tr} зависит от энергии, то поскольку, согласно данным § 80 ч. III, производная $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ ведет себя как δ-функция, имеем

$$L_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{tr}(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial x}(\mu + kTx)\, dx \approx -\lambda_{tr}(\mu)\mu. \tag{58,5}$$

Отсюда для электропроводности получаем выражение

$$\sigma = \frac{j_z}{E} = \frac{16\pi e^2 m}{3(2\pi\hbar)^3} \lambda_{tr}(\mu)\,\mu, \tag{58,6}$$

или на основании (80,10) и (80,11) ч. III

$$\sigma = \frac{16\pi e^2 m \lambda_{tr}(\mu)\, \varepsilon_{\max}}{3(2\pi\hbar)^3} = \frac{16\pi e^2 m \lambda_{tr}(\mu)}{3(2\pi\hbar)^3} \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{58,7}$$

Последнюю, окончательную формулу можно еще представить в другом виде, введя скорость электрона $v(\mu)$ с энергией, равной $\varepsilon = \mu$. С помощью (79,3) ч. III находим

$$\sigma = \frac{e^2 \lambda_{tr}(\mu)}{m\mu(\mu)} \frac{N}{V} = \frac{e^2 \lambda_{tr}(\mu)}{mv(\mu)} n. \tag{58,8}$$

Мы видим, что электропроводность зависит от числа электронов в единице объема n, а также от скорости электрона на поверхности Ферми $v(\mu)$ и длины свободного пробега электрона с энергией, лежащей на поверхности Ферми.

Важной особенностью полученного выражения для электропроводности металла является то, что она оказывается не пропорциональной числу электронов в единице объема так как в формуле (58,8) скорость $v(\mu)$ выражается через n. Причина этого совершенно ясна: в электропроводности принимают участие только электроны, состояния которых лежат в зоне размытости распределения Ферми. Только эти электроны являются электронами проводимости. Электроны, находящиеся в состояниях, лежащих в заполненной области, не могут совершать систематическое движение и переносить ток.

Формула (58,8) для электропроводности содержит две неизвестные величины — число электронов в единице объема n и длину свободного пробега электронов с энергией, лежащей на поверхности Ферми, $\lambda(\mu)$. Скорость электронов $v(\mu)$, как мы уже сказали, выражается через n по формулам § 79 ч. III.

В следующем параграфе будет показано, что величина n может быть определена независимо от сопротивления. Тогда (58,8) позволяет выразить длину свободного пробега через электропроводность σ. Значение последней измеряется непосредственно. При этом оказывается, что значение λ_{tr} существенно превышает межатомное расстояние (постоянную решетки). Кроме того, λ_{tr} существенно зависит от температуры. Например, для меди, у которой можно принять, что на каждый атом решетки приходится один свободный электрон, λ_{tr} изменяется от 7×10^{-7} *см*, при $T \approx 1300^\circ$ K до 4×10^{-5} *см* при $T \approx 100^\circ$ K, что в 300—2000 раз больше расстояния между атомами в решетке.

Расчет λ_{tr}, проведенный в § 61, показывает, что температурный ход λ_{tr}, а с ней и электропроводности σ, является различным в случае температур высоких и низких по сравнению с дебаевской температурой θ.

При высоких температурах $T \gg \theta$, $\sigma \sim T$. При низких температурах σ обнаруживает быстрое, пропорциональное $1/T^5$ возрастание с понижением температуры. При $T = 0$ в идеально чистом металле $\sigma \to \infty$, и омическое сопротивление стремится к нулю.

У загрязненных образцов, а также образцов с механическими дефектами — микротрещинами, остаточными механическими напряжениями и т. п., при весьма низких температурах (порядка нескольких абсолютных градусов) имеется так называемое остаточное сопротивление, не зависящее от температуры и пропорциональное концентрации примесей.

Таким образом, электропроводность металла при $T \neq 0$ имеет конечное значение, а сопротивление отлично от нуля. Лишь при $T = 0$, и притом в образце, не содержащем никаких примесей и дефектов, металлический проводник не оказывает никакого сопротивления прохождению тока. Такой проводник получил название идеального. Поскольку невозможно получить температуру, равную нулю, а также невозможно изготовить чистый образец, идеальный проводник представляет собой некоторый предел, к которому можно стремиться, понижая температуру и очищая металлы от примесей.

§ 59. Эффект Холла

Важные сведения о свойствах электронного газа можно получить, изучая поведение металлов, помещенных во внешнее магнитное поле.

Если металлический образец, по которому течет ток (направление тока примем за ось x), помещен в магнитное поле, направленное по оси z, в нем возникает электрическое поле E_y. Происхождение этого эффекта, именуемого эффектом Холла, вполне очевидно.

Под действием силы Лоренца электроны, образующие ток и совершающие преимущественное движение, отклоняются в отри-