

выражается формулой

$$\kappa_{\text{эл}} \approx v_{\text{эл}} \lambda_{\text{ф}} C_V^{\text{эл}} \approx \lambda_{\text{ф}} \frac{kT v_{\text{эл}}}{E_{\text{макс}}} n \sim \text{const} \quad (61,15)$$

и не зависит от температуры.

Очевидно, что при $T \gg \Theta_c$ имеет место так называемый закон Видемана — Франца $\frac{T\sigma}{\kappa} = \text{const}$. При низких температурах температуропроводность определяется длиной свободного пробега $\lambda_{\text{ф}}$. Действительно, при одиночном соударении с фоном энергия электрона изменяется на величину порядка энергии фона, т. е. порядка kT . Это изменение энергии отвечает возможному переносу энергии электронами. Перенос больших энергий невозможен, поскольку электрон не может отдавать энергию, заметно превышающую kT . Поэтому механизм переноса энергии электронами сводится к передачам энергии порядка I при каждом столкновении с фоном, которое отвечает отклонению электрона на малый угол.

Теплопроводность электронов при $kT \ll \Theta_c$ выражается формулой

$$\kappa_{\text{эл}} \approx \lambda_{\text{ф}}^{(1)} C_V^{\text{эл}} v_{\text{эл}} \sim \lambda_{\text{ф}}^{(1)} \cdot \frac{kT}{E_{\text{макс}}} n v_{\text{эл}} \sim \frac{1}{T^2}, \quad (61,16)$$

где $\lambda_{\text{ф}}^{(1)}$ — длина свободного пробега до первого столкновения.

Совершенно очевидно, что при этом закон Видемана — Франца не имеет места. Отношение электропроводности к теплопроводности оказывается зависящим от температуры. Мы не можем в рамках этой книги останавливаться на других явлениях, связанных с электронным газом в металлах, и отсылаем читателя к специальной литературе¹⁾.

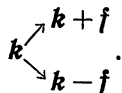
§ 62. Интеграл столкновений для электронов в металле

Перейдем теперь к последовательному рассмотрению кинетического уравнения и доказательству существования длины свободного пробега электронов в металле. Для этого следует прежде всего получить выражение для интеграла столкновений. Мы будем учитывать только соударение между электронами и фонами.

Рассмотрим некоторое состояние электрона k . Электрон может покидать данное состояние k двояким путем: поглощая

¹⁾ См., например, Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, ИЛ, 1956; А. Вильсон, Квантовая теория металлов, Гостехиздат, 1941; Г. Бете и А. Зоммерфельд, Электронная теория металлов, Гостехиздат, 1938; Ч. Киттель, Квантовая теория твердых тел, «Наука», 1967; Дж. Займан, Принципы теории твердого тела, «Мир», 1966.

фонон f или испуская фонон f , т. е.



Число электронов, уходящих в единицу времени из состояния k путем излучения фонона, равно

$$\Phi(|k|)(1 - \Phi(|k-f|)) dW_+(k \rightarrow k-f),$$

где $dW_+(k \rightarrow k-f)$ дается формулой (56,5), а множитель $(1 - \Phi(|k-f|))$ введен для учета принципа Паули. Благодаря этому множителю число электронов, переходящих в заполненное состояние, для которого $\Phi(k-f) = 1$, равно нулю.

Число электронов, уходящих из состояния k путем поглощения фонона, равно

$$\Phi(k)(1 - \Phi(k+f)) dW_-(k \rightarrow k+f),$$

где $dW_-(k \rightarrow k+f)$ определено в (56,4). Полное число электронов, покидающих состояние k за 1 сек, получается интегрированием суммы приведенных выражений по всем возможным значениям f , т. е.

$$I_- = \int \{ \Phi(k)(1 - \Phi(k-f)) dW_+(k \rightarrow k-f) + \\ + \Phi(k)(1 - \Phi(k+f)) dW_-(k \rightarrow k+f) \}.$$

Интегрирование ведется по всем значениям $|f|$ и всем ориентациям вектора f . Напишем, далее, число электронов, попадающих в единицу времени в состояние k в результате испускания и поглощения фононов электронами, находящимися в других состояниях. Рассуждения, аналогичные приведенным, дают:

$$I_+ = \int \{ \Phi(k+f)(1 - \Phi(k)) dW_+(k+f \rightarrow k) + \\ + \Phi(k-f)(1 - \Phi(k)) dW_-(k-f \rightarrow k) \}.$$

Составляя баланс электронов, можем написать:

$$I_{\text{столкн}} = I_+ - I_-.$$

Подставляя значения I_+ и I_- и входящих в них вероятностей переходов dW_+ и dW_- , согласно формулам § 56 можем написать интеграл $I_{\text{столкн}}$ в виде

$$I_{\text{столкн}} = \frac{4\pi}{9\hbar} \left(\frac{\hbar}{MN} \right) g^2 V \int \frac{f^2}{\omega_f} \{ \{ (n_f + 1) \Phi(k+f)(1 - \Phi(k)) \delta(E_{k+f} - E_k - \hbar\omega_f) + n_f (1 - \Phi(k)) \Phi(k-f) \delta(E_{k-f} - E_k + \hbar\omega_f) \} - \\ - \{ (n_f + 1) \Phi(k)(1 - \Phi(k-f)) \delta(E_k - E_{k-f} - \hbar\omega_f) + n_f \Phi(k)(1 - \Phi(k+f)) \delta(E_k - E_{k+f} + \hbar\omega_f) \} \} \frac{df}{(2\pi)^3}.$$

Объединяя процессы с одинаковыми дельта-функциями и подставляя $I_{\text{столкн}}$ в кинетическое уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\mathbf{F}}{\hbar} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{k}} = \frac{4\pi V}{9\hbar} \left(\frac{\hbar}{MN} \right) g^2 \int \frac{f^2}{\omega_f} \times \\ \times \{ [\Phi(\mathbf{k} + \mathbf{f})(1 - \Phi(\mathbf{k})) (n_f + 1) - \Phi(\mathbf{k})(1 - \Phi(\mathbf{k} + \mathbf{f})) n_f] \times \\ \times \delta(E_{\mathbf{k}+\mathbf{f}} - E_{\mathbf{k}} - \hbar\omega_f) + [n_f(1 - \Phi(\mathbf{k})) \Phi(\mathbf{k} - \mathbf{f}) - \\ - (n_f + 1)\Phi(\mathbf{k})(1 - \Phi(\mathbf{k} - \mathbf{f}))] \delta(E_{\mathbf{k}-\mathbf{f}} - E_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_f) \} \frac{d\mathbf{f}}{(2\pi)^3}. \quad (62,1) \end{aligned}$$

При этом, объединяя члены, мы воспользовались четностью дельта-функции

$$\delta(E_{\mathbf{k}+\mathbf{f}} - E_{\mathbf{k}} - \hbar\omega_f) \equiv \delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{f}} + \hbar\omega_f).$$

Убедимся прежде всего, что в состоянии равновесия функция распределения электронов $\Phi(\mathbf{k}) \equiv \Phi_0$ представляет распределение Ферми—Дирака, а функция распределения фононов $n_f \equiv n_0$ — распределение Бозе—Эйнштейна. В состоянии равновесия $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{F} = 0$, таким образом,

$$I_{\text{столкн}} = 0. \quad (62,2)$$

Нетрудно видеть, что условие (62,2) выполняется, если каждая из квадратных скобок в подынтегральном выражении (62,1) обращается в нуль, т. е.

$$\Phi_0(\mathbf{k} + \mathbf{f})(1 - \Phi_0(\mathbf{k})) (n_f + 1) - \Phi_0(\mathbf{k})(1 - \Phi_0(\mathbf{k} + \mathbf{f})) n_f = 0, \quad (62,3)$$

$$E(\mathbf{k} + \mathbf{f}) = E(\mathbf{k}) + \hbar\omega_f,$$

$$\Phi_0(\mathbf{k} - \mathbf{f})(1 - \Phi_0(\mathbf{k})) n_f - \Phi_0(\mathbf{k})(1 - \Phi_0(\mathbf{k} - \mathbf{f})) (n_f + 1) = 0,$$

$$E(\mathbf{k} - \mathbf{f}) = E(\mathbf{k}) - \hbar\omega_f. \quad (62,4)$$

Решение функциональных уравнений (62,3) и (62,4) с дополнительными соотношениями, выражающими закон сохранения энергии, выполняется по обычной схеме. При этом получается

$$\Phi_0 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} + 1}, \quad n_f = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Зная равновесные функции распределения электронов и фононов и считая отклонение от равновесного состояния малым, можно решить интегро-дифференциальное уравнение (62,1).