§ 63. Решение кинетического уравнения

В дальнейшем мы ограничимся вычислением электропроводности металла при высокой температуре $T \gg \Theta$, где Θ — дебаевская температура. Аналогия между классическим и квантовым кинетическим уравнением для функции распределения электронов делает естественным применение для его интегрирования метода Лоренца. В стационарном однородном электрическом поле кинетическое уравнение можно написать как

$$\frac{e\mathscr{E}}{\hbar}\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{k}} = I_{\text{столкн}}. \tag{63,1}$$

Его решение будем искать в виде

$$\Phi' = \Phi_0 + \Phi', \tag{63,2}$$

где поправка к функции распределения равна

$$\Phi'(\boldsymbol{k}) = \Phi_1(|\boldsymbol{k}|)\,\boldsymbol{k}_z = \Phi_1(|\boldsymbol{k}|)\,k\cos\vartheta, \tag{63,3}$$

а ϑ — угол между направлениями вектора $\boldsymbol{k}$ и полем $\mathscr{E}$.

При вычислении интеграла необходимо сделать некоторые допущения о виде функций $E(k)$ и ω_f. Мы будем считать, что $\omega_f = cf$, где c — скорость звука.

Будем, далее, полагать, что энергия электрона имеет вид см. (61,2)

$$E = \alpha k^2,$$

как это имеет место у квазисвободных электронов и у сильно связанных электронов вблизи края зоны.

Преобразуем интеграл столкновений в этих упрощающих предположениях, подставляя в него ω, определенное формулой (47,16). При выполнении интегрирования введем полярные координаты с полярной осью, направленной по вектору $\boldsymbol{k}$.

Выпишем интеграл столкновений. Для сокращения формул ограничимся первой его частью, содержащей дельта-функцию, отвечающую процессу излучения:

$$I_{\text{столкн}} = \frac{4\pi}{9\hbar(2\pi)^3}\left(\frac{\hbar}{MN}\right)g^2V(I_1 + I_2), \tag{63,4}$$

$$\begin{aligned} I_1 = \int \frac{f^2}{\omega_f}\{[\Phi_0(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f}) + \Phi'(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f})][1 - \Phi_0(\boldsymbol{k}) - \Phi'(\boldsymbol{k})](n_f+1) - \\ - [\Phi_0(\boldsymbol{k}) + \Phi'(\boldsymbol{k})][1 - \Phi_0(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f}) - \Phi'(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f})]\,n_f\} \times \\ \times \delta(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f}} - E_{\boldsymbol{k}} - \hbar\omega_f)\,f^2\,df\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \end{aligned} \tag{63,5}$$

Далее мы воспользуемся условием равновесия (62,3) и (62,4) и пренебрежем произведениями функций $\Phi'(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f})\Phi'(\boldsymbol{k})$.

Подставим в дельта-функцию выражение (61,2) для энергии:

$$I_1 = \int \frac{f^3}{c} \{\Phi'(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f})[1-\Phi_0(\boldsymbol{k})](n_f+1) - \Phi'(\boldsymbol{k})\Phi_0(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f})(n_f+1) - \\ - \Phi'(\boldsymbol{k})[1-\Phi_0(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f})]n_f + \Phi'(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f})\Phi_0(\boldsymbol{k})n_f\} \times \\ \times \delta(2\alpha kf\cos\theta + \alpha f^2 - \hbar cf)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, df.$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем высоких температур.

При высоких температурах $n_f \gg 1$. В этом предположении можно сделать замену

$$n_f + 1 \simeq n_f,$$
$$n_f \simeq \frac{(kT)}{\hbar cf}.$$

Напишем теперь разложение (63,2) более подробно. Именно, напишем:

$$\Phi(\boldsymbol{k}) = \Phi_0(E_{\boldsymbol{k}}) + k_{\mathscr{E}}\Phi_1(E_{\boldsymbol{k}}) = \Phi_0(E_{\boldsymbol{k}}) + k\cos\vartheta\Phi_1(E_{\boldsymbol{k}}),$$
$$\Phi(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f}) = \Phi_0(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f}}) + k_{\mathscr{E}}\Phi_1(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f}}) + f_{\mathscr{E}}\Phi_1(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f}}) = \\ = \Phi_0(E_{\boldsymbol{k}} + \hbar\omega_f) + k\cos\vartheta\Phi_1(E_{\boldsymbol{k}} + \hbar\omega_f) + f\cos\gamma\Phi_1(E_{\boldsymbol{k}} + \hbar\omega_f).$$

Здесь $k_{\mathscr{E}}$ и $f_{\mathscr{E}}$ — проекции векторов $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{f}$ на направление электрического поля $\mathscr{E}$. Тогда найдем:

$$I_1 = \int \frac{f^2(kT)}{\hbar c^2}\{(k\cos\theta + f\cos\gamma)\Phi_1(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f}}) - \\ - k\cos\vartheta\Phi_1(E_{\boldsymbol{k}})\}\delta(2\alpha kf\cos\theta + \alpha f^2 - \hbar cf)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, df.$$

Поскольку $E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f}} = E_{\boldsymbol{k}} + \hbar\omega_f$, а энергия электрона порядка $E_{\text{макс}}$, можно положить

$$\Phi_1(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{f}}) \simeq \Phi_1(E_{\boldsymbol{k}}).$$

Поэтому

$$I_1 = \frac{(kT)}{\hbar c^2}\Phi_1(E_{\boldsymbol{k}}) \int f^3\cos\gamma\,\delta(2\alpha kf\cos\theta + \alpha f^2 - \hbar cf)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, df.$$

Для выполнения интегрирования по углам выразим $\cos\gamma$ через $\cos\theta$:

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\theta + \sin\vartheta\sin\theta\cos\varphi.$$

Тогда

$$I_1 = \frac{kT}{\hbar c^2}\Phi_1(E_{\boldsymbol{k}}) \int f^3(\cos\theta\cos\vartheta + \sin\vartheta\sin\theta\sin\varphi) \times \\ \times \delta(2\alpha kf\cos\theta + \alpha f^2 - \hbar cf)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, df = \\ = 2\pi\frac{kT}{\hbar c^2}\Phi_1(E_{\boldsymbol{k}})\cos\vartheta \int_0^\pi f^3\cos\theta\,\delta(2\alpha kf\cos\theta + \alpha f^2 - \hbar cf)\sin\theta\, d\theta\, df.$$

При интегрировании по φ слагаемое, пропорциональное $\sin\varphi$, обратилось в нуль.

Интегрирование по углу θ можно провести, введя новую переменную

$$2\alpha kf\cos\theta + \alpha f^2 - \hbar cf = u.$$

При таком преобразовании получаем:

$$I_1 = \frac{2\pi\,(kT)}{\hbar c^2}\,\frac{\cos\vartheta}{2\alpha k}\,\Phi_1(E_k)\int f^2\,df\int\limits_{u_1}^{u_2}\left(\frac{u}{2\alpha kf}+\frac{\hbar cf}{2\alpha kf}-\frac{\alpha f^2}{2\alpha kf}\right)\delta(u)\,du.$$

Как мы уже видели в § 61,

$$\int\limits_{u_1}^{u_2}\delta(u)\,du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(u)\,du = 1.$$

Кроме того, поскольку при всех возможных значениях f, u_1 и u_2 имеют разные знаки,

$$\int\limits_{u_1}^{u_2}u\delta(u)\,du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}u\delta(u)\,du = 0.$$

Учитывая эти равенства, получаем окончательно:

$$I_1 = \frac{\pi kT}{\hbar c^2}\,\frac{\cos\vartheta\Phi_1(E_k)}{\alpha k}\int\limits_0^{f_{\text{макс}}}\left(\frac{\hbar c}{2\alpha k}-\frac{\alpha f}{2\alpha k}\right)f^2\,df =$$

$$= \frac{(kT)}{\hbar c^2}\,\pi\,\frac{\cos\vartheta}{2\alpha k}\left(\frac{hcf^3_{\text{макс}}}{3\alpha k}-\frac{f^4_{\text{макс}}}{4k}\right)\Phi_1(E_k).$$

Вычисление второй части интеграла столкновений дает:

$$I_2 = \int\frac{f^2}{\omega_f}\{[n_f(1-\Phi(\boldsymbol{k}))\,\Phi(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{f}) - (n_f+1)\,\Phi(\boldsymbol{k})\,\times$$

$$\times(1-\Phi(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{f}))]\}\,\delta(E_{k-f}-E_k+\hbar\omega_f)\,d\boldsymbol{f} =$$

$$= \frac{\pi\,(kT)}{\hbar c^2}\,\frac{\cos\vartheta}{2\alpha k}\left(-\frac{\hbar cf^3_{\max}}{3\alpha k}-\frac{f^4_{\max}}{4k}\right)\Phi_1(E_k).$$

В силу (63,4) и выражений для I_1 и I_2 находим выражение для интеграла столкновений:

$$I_{\text{столкн}} = -\frac{\pi^2\,(kT)\,g^2f^4_{\max}}{9\hbar c^2\,(2\pi)^3\,\alpha k^2}\left(\frac{V}{MN}\right)\cos\vartheta\Phi_1(E_k). \qquad (63,6)$$

Преобразуем теперь левую часть кинетического уравнения. Считая силу $\boldsymbol{F}$, действующую на электрон, слабой, имеем

$$\boldsymbol{F}\frac{\partial\Phi_0}{\partial p}\simeq\frac{e\mathscr{E}}{\hbar}\frac{\partial\Phi_0}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial k_z}=\frac{e\mathscr{E}\cos\vartheta}{\hbar}2\alpha k\frac{\partial\Phi_0}{\partial E_k}.$$

Приравнивая последнее выражение и $I_{\text{столкн}}$, получаем значение поправки к равновесной функции распределения:

$$\Phi_1=-e\mathscr{E}\frac{\partial\Phi_0}{\partial E_k}\left(\frac{18\alpha^2k^3(Mc^2)}{\pi^2(kT)g^2}\left(\frac{N}{V}\right)\frac{1}{f_{\text{макс}}^4}\right)(2\pi)^3. \qquad (63,7)$$

Сравнение (63,7) с (27,11) показывает, что

$$\lambda_{\Phi}=\frac{144\alpha^2k_0^4(Mc^2)\pi N}{(kT)g^2Vf_{\text{макс}}^4}. \qquad (63,8)$$

В соответствии с (80,13) ч. III, значение электронной энергии берется равной энергии Ферми:

$$\alpha k_0^2=\mu\simeq E_{\text{макс}},$$

где μ — парциальный потенциал равновесного распределения электрона.

Покажем далее, что результат, полученный для λ_{Φ}, находится в согласии с формулой (61,7). Для этого напишем выражение для λ_{Φ} в виде

$$\lambda_{\Phi}=144\frac{E_{\text{эл}}^2}{g}\left(\frac{Mc^2}{g}\right)\frac{a}{\pi^3(kT)}\simeq 5\left(\frac{Mc^2}{g}\right)\frac{E_{\text{эл}}}{g}\frac{E_{\text{эл}}}{kT}a\simeq 5\frac{E_{\text{эл}}}{kT}a.$$

Это значение λ_{Φ} находится в очень хорошем согласии с полученными в § 61 качественными результатами.

Совершенно аналогичным образом может быть найдено решение кинетического уравнения для случая температур ниже дебаевской. При этом получается выражение для λ_{Φ}, совпадающее с (61,12).

Мы не будем останавливаться на этих довольно громоздких вычислениях. Теория находится в хорошем согласии с опытом для металлов, имеющих кристаллическую решетку с высокой симметрией.

В металлах, обладающих решеткой с низкой симметрией, оказываются весьма существенными эффекты анизотропии. Различие между компонентами тензора σ_{ik} в разных кристаллографических направлениях иногда оказываются и очень значительными. Для построения теории кинетических явлений с учетом анизотропии необходимо более детально учесть характер поверхности Ферми[1]).

В случае металлов с относительно малым количеством примесей, или в случае сплавов с малой концентрацией одной из компонент или упорядоченных твердых растворов, приближения теории оказываются справедливыми.

Однако в сильно легированных металлах, неупорядоченных твердых растворах и в жидких металлах не выполнено основное допущение теории существования правильной периодической структуры.

Как мы указывали в § 39, электропроводность таких систем, рассчитывается с помощью аппарата временны́х коррелятивных функций.

§ 64. Сверхпроводимость

В предыдущих параграфах мы рассмотрели некоторые особенности металлических проводников. Наше рассмотрение было бы неполным, если бы мы не остановились вкратце на явлении сверхпроводимости. Макроскопическая теория сверхпроводимости обсуждалась ранее (§ 21 ч. IV). В последние годы удалось построить достаточно полную микроскопическую теорию сверхпроводимости, которую мы изложим здесь в общих чертах.

Уже сравнительно давно было высказано предположение о сходстве между явлениями сверхтекучести и сверхпроводимости. Именно, неослабляющийся омическим сопротивлением ток в сверхпроводнике естественно было уподобить сверхтекучему потоку электронов по решетке.

Сверхтекучесть, как это было выяснено в § 5, возникает в системе частиц, если энергетический спектр ее коллективных возбуждений удовлетворяет определенным требованиям. Эти требования не связаны непосредственно со статистикой частиц, из которых построена система. Однако спектр коллективных возбуждений, удовлетворяющий условию сверхтекучести, удавалось получить до последнего времени только для неидеального бозе-газа. Качественно понять причину этого можно из следующего рассуждения, которое позволяет уяснить различие между ферми- и бозе-системами.

Частицы бозе-газа в сверхпроводящем состоянии образуют конденсат, скапливаясь в состоянии с импульсом, равным нулю. Силы отталкивания между частицами обеспечивают появление в системе коллективного движения. Коллективные возбуждения в системе обладают энергетическим спектром, удовлетворяющим

---

[1]) И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **69**, 419 (1959); **78**, 411 (1962); **87**, 389 (1965).