Поскольку в рассматриваемом случае речь идет об элементарных возбуждениях, движение которых связано с переносом заряда, ясно, что мы пришли к выводу о наличии у него сверхпроводимости.

Следует еще заметить, что взаимодействие посредством парного обмена фононов, по-видимому, не является единственным типом взаимодействия между электронами, ответственными за сверхпроводимость. Указание на это дает тот факт, что существуют сверхпроводники (рутений, осмий), не обнаруживающие изотопического эффекта. Однако из предыдущих расчетов видно, что существующая теория сверхпроводимости не очень чувствительна к детальному характеру сил взаимодействия (притяжения) между электронами, ответственному за появление свойства сверхпроводимости.

§ 65. Теория ферми-жидкости

Несколько лет назад Л. Д. Ландау была предложена феноменологическая теория ферми-жидкости, в которой с самого начала предполагается существование сильного взаимодействия между ферми-частицами. Эта теория позднее получила статистическое обоснование, которое слишком сложно для того, чтобы его можно было изложить в этой книге[1]).

Эта теория была применена к описанию поведения изотопа жидкого гелия He^3, ядра которого имеют спин 1/2 и должны подчиняться статистике Ферми. Если высказать предположение, что энергетический спектр системы электронов в кристаллической решетке сравнительно мало отличается от спектра электронной жидкости, заполняющей соответствующий объем, то она в равной мере относится и к электронам в металлах.

В основу теории положено допущение, что как бы ни было сильно взаимодействие между частицами, оно не может нарушить принципа запрета. Поэтому числа заполнения энергетических состояний в жидкости, как и в газе, могут быть равны только нулю и единице. Это означает, что в ферми-жидкости при абсолютном нуле заполнены все энергетические уровни вплоть до некоторой граничной поверхности Ферми.

Распределение по энергиям имеет характер ступенчатой функции,

$$f=\begin{cases} 0 & \varepsilon>\varepsilon_F, \\ 1 & \varepsilon<\varepsilon_F. \end{cases}$$

[1]) См А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, 1962. В своем изложении теории ферми-жидкости мы следуем этой книге.

Энергия и импульс на поверхности Ферми связаны с числом частиц соотношением (см. § 79 ч. III)

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{65,1}$$

При температуре отличной от нуля, но достаточно низкой, возникают коллективные возбуждения и ступенчатое распределение несколько размыкается. Если температура является достаточно низкой, то можно считать, что энергия этих возбуждений близка к граничной энергии ε_F.

Появление возбуждения всегда сопровождается образованием свободных вакансий — дырок в заполненных состояниях внутри поверхности Ферми. Исчезновение возбуждений связано с заполнением вакантных состояний — аннигиляций «дырок» и «частиц». Поэтому можно утверждать, что возбуждения возникают и исчезают попарно.

Если отсчитывать энергию возбуждений от поверхности Ферми и приписывать возбуждениям определенное значение импульса, то их можно трактовать как пару квазичастиц — собственно квазичастицу и дырку.

Энергия возбуждений при малых возбуждениях может быть представлена в виде разложения по малому параметру $(p - p_F)$

$$\varepsilon = \varepsilon_F + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_{p_F}(p - p_F). \tag{65,2}$$

Аналогично, энергия дырки (отсчитываемая, как всегда, вниз от поверхности Ферми)

$$-\varepsilon = \varepsilon_F + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_{p_F}(p_F - p). \tag{65,3}$$

В соответствии с общими положениями теории квазичастиц, оба вида частиц равноправны и их свойства могут описываться величиной

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_{p=p_0} = \frac{p_0}{m^*}, \tag{65,4}$$

где m^* — эффективная масса.

При низких температурах ширина интервала размытости распределения, т. е. ширина интервала,

$$(\varepsilon - \varepsilon_F) \sim kT. \tag{65,5}$$

Для того чтобы приближение свободных квазичастиц имело смысл, необходимо, чтобы имело смысл понятие импульса, т. е. выполнялось условие (47,20).

Поскольку в ферми-жидкости возбуждения могут возникать и исчезать только попарно, число встреч пары «частица» —

«дырка» пропорционально N^2, где N — полное число возбуждений при данной температуре.

При низких температурах последнее растет пропорционально T. Соответственно этому, время жизни возбуждений

$$\tau \sim \frac{1}{N^2} \sim \frac{1}{T^2}. \tag{65,6}$$

Поэтому $\Delta\varepsilon$ — неопределенность в энергии квазичастицы согласно (65,6) равна

$$\Delta\varepsilon \sim \hbar T^2 \sim \frac{\hbar}{\tau}. \tag{65,7}$$

Сравнивая (65,7) и (65,5), мы видим, что при достаточно низкой температуре всегда

$$(\varepsilon - \varepsilon_F) \gg \Delta\varepsilon, \tag{65,8}$$

и понятие импульса независимых квазичастиц имеет смысл. Таким образом, квазичастицы в ферми-жидкости имеют импульс и эффективную массу. Они возникают или исчезают только попарно при редких соударениях и, следовательно, подчиняются принципу запрета.

Перечисленные свойства элементарных возбуждений позволяют трактовать их как ферми-систему, описываемую функцией распределения:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_F}{kT}} + 1}. \tag{65,9}$$

Функцию распределения квазичастиц мы будем нормировать условием

$$\int f(\varepsilon) \frac{d\Gamma}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{N}{V}, \tag{65,10}$$

где N — число реальных частиц жидкости в объеме V.

Однако, и в этом существенное отличие ферми-жидкости от ферми-газа, энергия ε данной квазичастицы зависит от плотности $n(\varepsilon)$, а следовательно, и от температуры.

В приближении самосогласованного поля каждая квазичастица движется в поле, создаваемом всеми остальными квазичастицами. Поэтому, если функция распределения возбуждений изменится на величину δf, соответственно изменится и энергия квазичастицы. Это изменение можно представить как

$$\delta\varepsilon = \int F(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') \, \delta f(\boldsymbol{p}') \frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{65,11}$$

где оператор $F(p, p')$ описывает интересующее нас изменение[1]). Этот формально введенный оператор играет основную роль в

[1]) Для упрощения формул мы не выписываем здесь зависимости оператора F от спинов.

теории ферми-жидкости. Формула (65,11) показывает, что энергия ε является функционалом от распределения f.

Свойства распределения Ферми определяют температурную зависимость термодинамических величин газа квазичастиц. Именно, пользуясь формулами § 80 ч. III, имеем

$$E = \int \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} \frac{d\Gamma}{(2\pi\hbar)^3} \simeq \frac{3N\varepsilon_F}{5}\left[1+\frac{5}{12}\pi^2\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right] \qquad (65,12)$$

и

$$C_V = kN\frac{\pi^2 kT}{\varepsilon_F}. \qquad (65,13)$$

Линейная температурная зависимость теплоемкости связана исключительно со ступенчатым характером фермиевского распределения. Более примечательными оказываются кинетические свойства ферми-жидкости. Именно, согласно (65,6) длина свободного пробега квазичастиц

$$\lambda \sim v_F\tau \sim \frac{v_F}{T^2} \qquad (65,14)$$

и быстро растет с понижением температуры. Это обстоятельство определяет температурную зависимость кинетических коэффициентов, возрастающих с понижением температуры. Так, например, вязкость, по порядку величины, равна

$$\eta \sim (m^* v_F)\, n\lambda \sim \frac{1}{T^2} \qquad (65,15)$$

а теплопроводность соответственно

$$\varkappa \sim (C_V n)\, v_F\lambda \sim \frac{1}{T}. \qquad (65,16)$$

Большая длина свободного пробега квазичастиц делает невозможным распространение в ферми-жидкости обычного звука. Как мы видели в § 26, при длинах волн, превышающих длину свободного пробега, в среде начинается весьма резкое затухание звуковых волн.

Оказывается, однако, что в ферми-жидкости могут распространяться периодические возмущения высокой частоты $\omega > \frac{1}{\tau}$, имеющие характер, принципиально отличный от обычных звуковых волн.

Напишем кинетическое уравнение для неравновесной функции распределения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = J \qquad (65,17)$$

и заменим в нем

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}}. \qquad (65,18)$$

Тогда кинетическое уравнение примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}=J. \qquad (65,19)$$

Интеграл столкновений $J\sim\frac{1}{\tau}$ и при достаточно низких температурах мал. Иными словами, при достаточно низких температурах столкновения между квазичастицами становятся столь редкими, что их влияние на изменение функции распределения мало́.

В этих условиях в идеальном газе передача возмущений прекращается. Существующее в ферми-жидкости взаимодействие приводит, как видно из (65,12), к изменению энергии квазичастиц при изменении функции распределения. Это — своеобразный вид дальнодействия между частицами в ферми-жидкости. Благодаря силам дальнодействия, возникшее в некоторый момент времени возмущение функции распределения распространяется по всей жидкости.

Положим в кинетическом уравнении

$$f=f_0(\varepsilon)+f_1(\boldsymbol{p}), \qquad (65,20)$$

где $f_0(\varepsilon)$ — равновесное распределение, а f_1 — возмущение.

Подставляя (65,20) в кинетическое уравнение, находим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}}=0. \qquad (65,21)$$

Заметим, что в равновесной жидкости $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}}=0$. Поэтому в последнем члене мы удержали лишь величину первого порядка малости. Поскольку равновесное распределение f_0 имеет вид ступенчатой функции, имеем (ср. § 80 ч. III)

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}=-\delta(\varepsilon-\varepsilon_F).$$

Поэтому возмущение f_1 также должно быть пропорционально этой дельта-функции. Будем искать его в виде

$$f_1\sim\alpha\delta(\varepsilon-\varepsilon_F)\,e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}. \qquad (65,22)$$

Выбрав вектор $\boldsymbol{k}$ за полярную ось и считая, что α зависит только от угла θ, получаем

$$i(v_F k\cos\theta-\omega)\alpha+\boldsymbol{v}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}}=0. \qquad (65,23)$$

Для изменения энергии $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}}$, пользуясь (65,11), можно написать

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}}=\int F(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\frac{\partial f_1(\boldsymbol{p}')}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi\hbar)^3}=i\boldsymbol{k}\int F(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')f_1(\boldsymbol{p}')\int\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (65,24)$$

При подстановке (65,24) в уравнение (65,23) следует взять значения импульса на поверхности Ферми, так что интегрирование по dp сводится к интегрированию по углам. Таким образом, получаем

$$(kv_F\cos\theta-\omega)\,\alpha(\theta)+\frac{kv_F\cos\theta\, p_F^3}{3\,(2\pi\hbar)^3}\int F\alpha(\theta')\,d\Omega=0. \qquad (65{,}25)$$

Зависимость F от угла неизвестна. Если принять, что F вообще от углов не зависит и является некоторой постоянной, то

$$\int F(p,\ p')\,\alpha(\theta')\,d\Omega=F\int\alpha(\theta')\,d\Omega=\mathrm{const}=A$$

и

$$\left(\frac{\omega}{kv_F}-\cos\theta\right)\alpha(\theta)=A\cos\theta$$

или

$$\alpha(\theta)=\frac{A\cos\theta}{\left(\dfrac{\omega}{kv}-\cos\theta\right)}. \qquad (65{,}26)$$

Подставляя это значение α в (66,26), получаем уравнение для определения $\frac{\omega}{kv}=\frac{u}{v}$, где u — скорость распределения возмущений:

$$\frac{u}{v_F}\ln\left(\frac{\dfrac{u}{v_F}+1}{\dfrac{u}{v_F}-1}\right)=1+\frac{1}{A}=1+\frac{3\,(2\pi\hbar)^3}{2\pi F p_F^3}. \qquad (65{,}27)$$

Из последнего выражения непосредственно видно, что скорость распределения возмущений может быть вещественной только, если она превышает скорость частиц на поверхности Ферми $v_F=\frac{p_F}{m^*}$. При этом, как видно из (65,26), возмущенная функция распределения оказывается вытянутой вперед по направлению распространения возмущения.

Полученный результат, как показывает более подробное рассмотрение, имеет общий характер и не связан с принятым упрощением $F=\mathrm{const}$. Учет угловой зависимости F приводит к еще более асимметричному распределению возмущенной функции.

Распространение рассмотренных возмущений является специфическим эффектом, связанным с взаимодействием квазичастиц. Этот эффект получил название «нулевого звука», поскольку он может распространяться при $T=0$. Ясно, что нулевой звук представляет существенно неравновесный процесс. Более полный расчет показывает, что распространение нулевого звука сопровождается его быстрым затуханием по длине $\sim u\tau$.

В самое последнее время существование «нулевого звука» получило полное экспериментальное подтверждение. В жидком гелии He^3 наблюдалось распространение и затухание нулевого звука, возбуждавшегося колебаниями стенок сосуда. Опыт подтвердил все основные выводы теории.

Свойства электронной ферми-жидкости во многих отношениях оказываются сходными со свойствами ферми-жидкости нейтральных частиц. Это относится к общему характеру возникновения возбуждений, ввиду энергетического спектра и т. п. Вместе с тем наличие кулоновского взаимодействия и взаимодействия с фононами решетки приводит к появлению довольно существенных, хотя и количественных различий. Теория электронной ферми-жидкости слишком сложна и неполно разработана для того, чтобы ее можно было излагать в рамках этой книги.

§ 66. Электроны в кристаллах диэлектриков

Как мы подчеркивали, различие между металлами, полупроводниками и диэлектриками связано главным образом с разным характером электронного спектра.

В кристаллах диэлектриков свободная зона отделена от заполненной зоны широкой (порядка одного или нескольких электрон-вольт) полосой запрещенных энергий.

Допустим, что в диэлектрике происходит поглощение света и возбуждение одного из атомов решетки. Поскольку кристалл обладает трансляционной симметрией и волновая функция возбужденного состояния ψ_n должна удовлетворять условию трансляционной симметрии

$$T\psi_n = \alpha_n\psi_n, \tag{66,1}$$

состояние возбуждения не может быть локализовано у определенного атома. Наоборот, оно должно двигаться по кристаллу и представлять возбужденное состояние кристалла как целого. Электронная волновая функция, описывающая кристалл в возбужденном состоянии, может быть представлена в виде (ср. 48,11)

$$\Psi = \sum e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\varphi_j, \tag{66,2}$$

где φ_j — симметризованная волновая функция, отвечающая возбуждению j-го атома в решетке. Волновая функция (66,2) удовлетворяет как уравнению Шредингера [при должном выборе $E(\boldsymbol{k})$], так и требованию трансляционной симметрии (48,4).

Мы видим, что коллективное возбуждение, — возбуждение, передающееся по решетке от одного атома к другому, можно рассматривать как квазичастицу с квазиимпульсом $p = \hbar\boldsymbol{k}$. Эта квазичастица получила название экситона. К экситону