Подчеркнем, что в процессе рассеяния число фотонов остается неизменным.

Тормозные свободно-свободные переходы представляют излучение или поглощение фотонов электроном, движущимся в поле ядра или другого электрона. Вероятность тормозного процесса W_{ff} пропорциональна квадрату плотности электронов N_e и имеет вид [1])

$$W_{ff} \sim \frac{N_e^2}{\omega^3}. \tag{68,18}$$

Вероятность тормозных процессов при малой плотности электронного газа и больших значениях плотности излучения оказывается, вообще говоря, гораздо меньшей вероятности комптоновского рассеяния. Поэтому мы будем пренебрегать тормозными процессами. Исключение составляет область очень низких частот. Поскольку W_{ff} очень быстро растет с уменьшением частоты, при достаточно низких частотах тормозные процессы становятся преобладающими. Это накладывает второе ограничение на значение рассматриваемой нами области частот, т. е.

$$\omega > \omega_{\text{гр}}, \tag{68,19}$$

где $\omega_{\text{гр}}$ — та частота, при которой (при данной плотности электронного и фотонного газов) изменение функции распределения из-за тормозного поглощения испускания становится больше, чем из-за комптон-эффекта. Частота $\omega_{\text{гр}}$, очевидно, тем ниже, чем меньше плотность N_e и больше $\rho(\omega, \boldsymbol{l})$.

До сих пор мы предполагали, что разреженная плазма взаимодействует с излучением с известным спектральным распределением $\rho(\omega, \boldsymbol{l})$. Возможна, однако, и другая постановка вопроса. Именно, в результате взаимодействия с электронами изменяется спектральное распределение излучения. Например, при взаимодействии с электронным газом, находящимся в состоянии равновесия, спектральное распределение излучения изменяется (эволюционирует) во времени. В тех же приближениях этот процесс также будет рассмотрен в дальнейшем.

§ 69. Кинетические уравнения для электронов и фотонов

Обратимся прежде всего к формулировке кинетических уравнений для электронов и фотонов. В кинетическом уравнении

$$\frac{df}{dt} = J, \tag{69,1}$$

---

[1]) См., например, В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956, стр. 279.

где $f = f(\boldsymbol{p}, t)$ — функция распределения электронов, интеграл столкновений можно представить в виде

$$J = J_c + I_{ee}. \tag{69,2}$$

Здесь I_{ee} — интеграл столкновения электронов между собой, определенный формулой Ландау (34,7).

Интеграл J_c определяет изменение функции распределения электронов вследствие комптоновского рассеяния ими падающих фотонов.

При каждом акте рассеяния происходит изменение импульса электрона согласно формуле (68,9).

Мы будем считать систему электронов и фотонов однородной в пространстве, так что функция распределения f не зависит от координат.

В дальнейшем мы будем рассматривать самый общий случай анизотропного распределения электронов и фотонов в пространстве импульсов. Поэтому мы будем считать функцию распределения электронов $f(\boldsymbol{p}, t)$ зависящей от вектора импульса и времени; соответственно функцию распределения фотонов (числа заполнения) представим в виде $n = n(\boldsymbol{k}, t)$. С учетом сказанного, а также формулы (68,14) для вероятности рассеяния, интеграл столкновений электронов с фотонами можно J_c записать в виде

$$J_c = -\int dW_{\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{k}'} f(\boldsymbol{p}, t) + \int dW_{\boldsymbol{k}'\to\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{p}', t), \tag{69,3}$$

где

$$dW_{\boldsymbol{k}'\to\boldsymbol{k}} = c\,[1 + n(\boldsymbol{k}, t)]\, n(\boldsymbol{k}', t)\, d\sigma\, d\boldsymbol{k}' = \frac{dw_{\boldsymbol{k}'\to\boldsymbol{k}}}{N_e}.$$

Первый интеграл в (69,3) выражает убыль числа электронов с импульсом $\boldsymbol{p}$, второй — приход электронов в это состояние в результате столкновений с фотонами.

В рассматриваемом нами случае низких частот излучения изменение импульса электрона при одиночном соударении с фотоном мало́ по сравнению с его средним значением. Поэтому функция распределения является медленно изменяющейся функцией своего аргумента, и в соответствии со сказанным в § 10 кинетическое уравнение сводится к уравнению типа Фоккера — Планка.

Не повторяя выкладок § 10, можно сразу написать уравнение Фоккера — Планка для трехмерного пространства импульсов, т. е. при $\lambda = p_x, p_y, p_z$, в виде

$$\frac{df}{dt} = -\frac{\partial}{\partial p_i}\left\{a_i f - \frac{\partial}{\partial p_k}(D_{ik} f)\right\} + I_{ee} \qquad (i,\ k = x,\ y,\ z), \tag{69,4}$$

где коэффициенты диффузии D_{ik} и подвижность a_i в пространстве импульсов выражаются формулами

$$D_{ik}=\int \Delta p_i \Delta p_k \, dW_{k\to k'}, \tag{69,5}$$

$$a_i=\int \Delta p_i \, dW_{k\to k'}. \tag{69,6}$$

Подставляя $dW_{k\to k'}$ из формулы (69,3), находим:

$$D_{ik}=\langle \Delta p_i \Delta p_k \rangle=\int \Delta p_i \Delta p_k n(\boldsymbol{k})[1+n(\boldsymbol{k}')]\, c\, d\boldsymbol{k}\, d\sigma, \tag{69,7}$$

$$a_i=\langle \Delta p_i \rangle=\int \Delta p_i n(\boldsymbol{k})[1+n(\boldsymbol{k}')]\, c\, d\boldsymbol{k}\, d\sigma, \tag{69,8}$$

где $\langle\,\rangle$ означает среднее по функции распределения фотонов. Заметим, что коэффициенты диффузии в пространстве импульсов характеризуют беспорядочный набор энергии электронами, тогда как подвижность — действующую на электрон систематическую силу. В следующих параграфах мы вычислим кинетические коэффициенты (69,7) и (69,8) и найдем решение уравнения (69,4) в различных условиях.

Оказывается целесообразным проводить вычисление кинетических коэффициентов в той системе отсчета, в которой электрон покоится. Именно в этой системе отсчета сечение рассеяния имеет простой вид. Кроме того, имеет простой вид и выражение для передаваемого импульса.

Прежде чем перейти к обсуждению кинетического уравнения для электронов, найдем соответствующее кинетическое уравнение для фотонов. В этом случае мы ограничимся случаем изотропного распределения фотонов, т. е. $n=n(\omega, t)$.

Имеем, очевидно,

$$\frac{dn}{dt}=J_c^{(f)}, \tag{69,9}$$

где $J_c^{(f)}$ — интеграл столкновений фотонов со свободными электронами:

$$J_c^{(f)}=-\int n(\omega, t)[1+n(\omega', t)]\, c\, d\sigma f(\boldsymbol{p}, t)\, d\boldsymbol{p}+ \\ +\int n(\omega', t)[1+n(\omega, t)]\, c\, d\sigma f(\boldsymbol{p}', t)\, d\boldsymbol{p}. \tag{69,10}$$

Первое слагаемое дает убыль числа фотонов с частотой ω при столкновении с электроном с импульсом $\boldsymbol{p}$, второе — приход фотонов в это состояние.

В состоянии равновесия $\frac{dn}{dt}=\frac{df}{dt}=0$. Как мы видели ранее, максвелловское распределение обращает в нуль интеграл столкновений электронов между собой I_{ee}. Простая проверка позволяет убедиться в том, что интегралы J_c и $J_c^{(f)}$ обращаются в нуль максвелловским распределением с температурой T для электронов и одновременно функцией распределения фотонов вида

$$n(\mu,\ \omega)=\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega-\mu}{kT}}-1}, \tag{69,11}$$

т. е. функцией распределения Бозе с химическим потенциалом μ, отличным от нуля. Последний результат имеет простой смысл: в нашем приближении, когда излучением и поглощением фотонов пренебрегается, их полное число в системе фиксировано. Напомним [ср. (76,6) и ч. III], что в обычных условиях, когда число фотонов не фиксировано, минимуму свободной энергии отвечает значение $\mu=0$. Поэтому ясно, что процессы поглощения и излучения приведут к тому, что по прошествии достаточно большого промежутка времени $\mu\to 0$ и распределение (69,11) превратится в распределение Планка.

Переходя теперь к обсуждению кинетического уравнения для фотонов (69,9), покажем, что и оно может быть сведено к дифференциальному уравнению типа Фоккера — Планка. Для случая нерелятивистских электронов и достаточно мягкого излучения $\hbar\omega \ll mc^2$ и, как видно из (68,6), изменение частоты фотона при рассеянии мало́.

Допустим, что электроны можно характеризовать равновесным максвелловским распределением с температурой T. Вводя новую переменную $x=\frac{\hbar\omega}{kT}$, можно разложить функцию распределения фотонов в ряд по степеням $\Delta x=\frac{\hbar\,\Delta\omega}{kT}$.

Тогда имеем, ограничиваясь первыми членами разложения,

$$\begin{aligned}J_c^{(f)} &= -\int dp\,[1+n(x+\Delta x)]\,n(x)\,c\,d\sigma f(\varepsilon)+\\&+\int dp\,n(x+\Delta x)\,[1+n(x)]\,c\,d\sigma f(\varepsilon)=[1+n(x)]\int dp\,f(\varepsilon)\,\Delta x\,c\,d\sigma+\\&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}+2(1+n)\frac{\partial n}{\partial x}+n(1+n)\right]c\int dp\,d\sigma\,(\Delta x)^2 f(\varepsilon)=J_c^{(1)}+J_c^{(2)}.\end{aligned} \tag{69,12}$$

Вычисление второго интеграла в разложении (69,12) проводится без труда:

$$J_c^{(2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}+2(1+n)\frac{\partial n}{\partial x}+n(1+n)\right]cI,$$

где

$$I=c\int dp\,d\sigma\,(\Delta x)^2 f(\varepsilon)=\sigma_{\mathrm{T}} N_e\left(\frac{kT}{mc^2}\right)x^2. \tag{69,13}$$

При этом для $\Delta x = \frac{\hbar \Delta\omega}{kT}$ мы воспользовались формулой (68,13) и через σ_T обозначили полное томсоновское сечение

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2.$$

Вычисление первого интеграла в (69,12) гораздо более громоздко. Однако это вычисление можно заменить следующим полезным и общим рассуждением. Закон сохранения числа частиц при рассеянии — в данном случае числа фотонов, требует, чтобы кинетическое уравнение имело вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = J_c^{(f)} = -\operatorname{div} \boldsymbol{j}, \tag{69,14}$$

где $\boldsymbol{j}$ — поток фотонов в пространстве импульсов. В силу изотропности функции распределения фотонов дивергенция потока имеет вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\{x^2 j(x)\}. \tag{69,15}$$

Кроме того, в состоянии равновесия, когда $n(x)$ представляет распределение Планка, поток фотонов $j(x)$ должен обращаться в нуль. Поэтому поток фотонов представим в виде

$$j = \left[\frac{\partial n}{\partial x} + A(x)\right] g(x),$$

где $A(x)$ и $g(x)$ — функции, подлежащие определению. В состоянии равновесия $j = 0$. Кроме того, для равновесного распределения имеет место равенство

$$(1+n)\,n = -\frac{\partial n}{\partial x}, \tag{69,16}$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой. Поэтому, если поток $j(x)$ представить в виде

$$j(x) = \left[\frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n)\right] g(x), \tag{69,17}$$

то оба сформулированных выше требования к j будут удовлетворены. Соответственно, находим для $J_c^{(f)}$ общее выражение:

$$J_c^{(f)} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{x^2 g(x)\left[\frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n)\right]\right\}. \tag{69,18}$$

Для того чтобы оба выражения для $J_c^{(f)}$ — (69,18) и (69,12), совпадали, необходимо положить $g(x) = -\frac{x^2 \sigma_T N_e kT}{mc^2}$.

Таким образом, окончательно

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{kT}{mc^2}(\sigma N_e c)\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}x^4\left\{\frac{\partial n(x, t)}{\partial x} + n(x, t) + [n(x, t)]^2\right\}. \tag{69,19}$$

Заметим, что хотя по форме уравнение (69,19) сходно с уравнением Фоккера — Планка, оно все же не является обычным уравнением этого типа. Наличие множителя $(1+n)$ в вероятности перехода привело к тому, что уравнение (69,19) оказалось нелинейным по отношению к искомой функции $n(x)$.

Совокупность кинетических уравнений для электронов (69,4) и фотонов (69,19) образует, очевидно, связанную систему. Получение общего решения этой системы было бы слишком сложной задачей. Поэтому в дальнейшем мы рассмотрим два предельных случая: 1) при заданном произвольном распределении фотонов ищется распределение электронов $f(p, t)$, 2) при заданном равновесном распределении электронов ищется функция распределения фотонов $n(\omega, t)$.

§ 70. Кинетика бозе-конденсации фотонного газа

Обратимся прежде всего ко второй постановке задачи — изучению изменения свойств неравновесного излучения при взаимодействии со свободными электронами. Иными словами, найдем закон эволюции распределения фотонов во времени $n(\omega, t)$ при их взаимодействии с электронным газом. Как это уже указывалось ранее, при этом состояние электронного газа будем считать фиксированным. Именно, будем полагать, что электронный газ все время находится в равновесном состоянии и характеризуется некоторой температурой T_e.

Сначала мы будем полностью пренебрегать процессами свободно-свободных переходов и считать, что рассеяние является единственным видом взаимодействия фотонов с электронами. Роль поглощения будет отмечена позднее.

Кинетическое уравнение (69,19), описывающее временну́ю зависимость $n(\omega, t)$, необходимо дополнить начальным условием.

Пусть $n_п(\omega)$ — равновесное (планковское) распределение фотонов, отвечающее температуре T_e. Тогда возможны два случая:

1) в момент времени $t = 0$ в системе задана $n(\omega, 0)$ такая, что полное число фотонов

$$N \sim \int_0^\infty n(x, 0)\, x^2\, dx$$