

Таким образом, окончательно

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{kT}{mc^2} (\sigma N_e c) \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left\{ \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} + n(x, t) + [n(x, t)]^2 \right\}. \quad (69,19)$$

Заметим, что хотя по форме уравнение (69,19) сходно с уравнением Фоккера — Планка, оно все же не является обычным уравнением этого типа. Наличие множителя  $(1 + n)$  в вероятности перехода привело к тому, что уравнение (69,19) оказалось нелинейным по отношению к искомой функции  $n(x)$ .

Совокупность кинетических уравнений для электронов (69,4) и фотонов (69,19) образует, очевидно, связанную систему. Получение общего решения этой системы было бы слишком сложной задачей. Поэтому в дальнейшем мы рассмотрим два предельных случая: 1) при заданном произвольном распределении фотонов ищется распределение электронов  $f(p, t)$ , 2) при заданном равновесном распределении электронов ищется функция распределения фотонов  $n(\omega, t)$ .

## § 70. Кинетика бозе-конденсации фотонного газа

Обратимся прежде всего ко второй постановке задачи — изучению изменения свойств неравновесного излучения при взаимодействии со свободными электронами. Иными словами, найдем закон эволюции распределения фотонов во времени  $n(\omega, t)$  при их взаимодействии с электронным газом. Как это уже указывалось ранее, при этом состояние электронного газа будем считать фиксированным. Именно, будем полагать, что электронный газ все время находится в равновесном состоянии и характеризуется некоторой температурой  $T_e$ .

Сначала мы будем полностью пренебрегать процессами свободно-свободных переходов и считать, что рассеяние является единственным видом взаимодействия фотонов с электронами. Роль поглощения будет отмечена позднее.

Кинетическое уравнение (69,19), описывающее временную зависимость  $n(\omega, t)$ , необходимо дополнить начальным условием.

Пусть  $n_n(\omega)$  — равновесное (планковское) распределение фотонов, отвечающее температуре  $T_e$ . Тогда возможны два случая:

1) в момент времени  $t = 0$  в системе задана  $n(\omega, 0)$  такая, что полное число фотонов

$$N \sim \int_0^{\infty} n(x, 0) x^2 dx$$

большее, чем в равновесном излучении

$$N_{\Pi} \sim \int_0^{\infty} n_{\Pi}(x) x^2 dx, \quad (70,1)$$

т. е.  $N > N_{\Pi}$ ;

2) в начальный момент времени число фотонов

$$N < N_{\Pi}. \quad (70,2)$$

Ясно, что ход эволюции  $n(x, t)$  в обоих случаях будет различным. В первом случае при столкновениях с электронами фотоны будут преимущественно терять энергию и эволюция их спектра будет состоять в среднем в движении вниз по энергетической оси («охлаждение» фотонного газа). Во втором случае при столкновениях фотоны будут в среднем приобретать энергию («нагревание» фотонов).

Поскольку мы не учитываем явления поглощения фотонов, их полное число в ходе эволюции будет оставаться постоянным.

Начинаем с рассмотрения явления «охлаждения» фотонного газа. При этом нас будет, как это подчеркивалось выше, интересовать область сравительно низких частот. Здесь обмен энергией между фотоном и электроном при рассеянии мал и справедливо кинетическое уравнение в форме (69,19). Более того, числа заполнения  $n(x, t)$  будут велики. Это, как уже указывалось, область применимости классической электродинамики.

Если считать  $n \gg 1$  и, кроме того, предположить, что выполнено неравенство

$$n^2 \gg \left| \frac{\partial n}{\partial x} \right|, \quad (70,3)$$

то уравнение (69,19) можно существенно упростить, отбросив малые (по сравнению с  $n^2$ ) члены  $n$  и  $\frac{\partial n}{\partial x}$ .

Впоследствии справедливость предположения (70,3) может быть проверена непосредственным вычислением.

Итак, имеем вместо (69,19)

$$\frac{\partial n}{\partial t'} \approx \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} (x^4 n^2), \quad (70,4)$$

где  $t' = \frac{(\sigma N_e c) kT}{mc^2} t$ .

Вводя новую неизвестную функцию  $f = x^2 n(x, t)$ , найдем

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = \frac{\partial f^2}{\partial x}. \quad (70,5)$$

Решение последнего уравнения в характеристиках гласит:

$$x = F(f) - 2ft', \quad (70,6)$$

где вид функции  $F(f)$  определяется начальными условиями.

Смысл полученного результата лучше всего понять на примере распределения, представленного на рис. 53. Согласно (70,6) все точки, расположенные на первоначальной кривой  $f(x, 0) = x^2 n(x, 0)$  (кривая 1) движутся по характеристикам — прямым, параллельным оси в направлениях уменьшающихся  $x$  (кривая 2) со скоростью, пропорциональной  $f$ . Время, в течение которого данная точка достигнет оси  $f$ , определяется, очевидно, выражением

$$\tau = \frac{F(f)}{2f}. \quad (70,7)$$

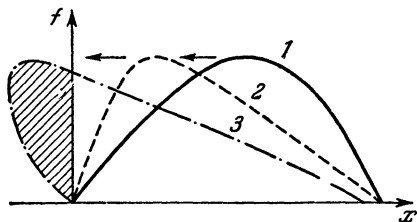


Рис. 53.

Решение (70,6) формально применимо при всех, как положительных, так и отрицательных значениях  $x$ . Поэтому с течением времени  $f(x, t)$  должно принять вид изображенной на рис. 53 кривой 3. Ясно, однако, что поскольку переменная  $x$  представляет энергию фотонов, переход к отрицательным  $x$  невозможен. Частицы, попавшие в состояние  $x = 0$ , т. е. в состояние с нулевой энергией, прекращают свое движение. Иными словами, фотоны накапливаются в состоянии с нулевой энергией, или, что то же самое, в состоянии бозе-конденсата.

Число частиц, перешедших в это состояние, определяется формально заштрихованной площадью на рис. 53. Необходимо, однако, подчеркнуть, что полученная картина кинетики перехода фотонов к состоянию с нулевой энергией неполна и не должна восприниматься буквально. В области очень низких частот всегда начинает играть существенную роль поглощение (см. § 68), как бы ни была мала концентрация электронного газа (точнее, плазмы). Если система (электронный газ + фотонный газ) предоставлена самой себе в течение достаточно большого промежутка времени, в ней, естественно, всегда установится статистическое равновесие и функция распределения фотонов станет планковской.

Поэтому не имело бы смысла искать стационарные решения уравнения (69,19) без учета тормозных процессов.

Однако динамика изменения спектра фотонов за те времена  $t^*$  и в той области частот, в которой не проявляются тормозные процессы, дается приведенной формулой (70,6). Изменения начального распределения  $n(x, 0)$  во времени иллюстрируют кривые, приведенные на рис. 53. Каждая из них представляет как бы мгновенную фотографию этого распределения при  $t$ , лежащем в интервале

$$0 < t \ll t^*.$$

Поскольку кинетика рассмотренного процесса существенно зависит от формы начального распределения, интересно рассмотреть случай, когда  $f(x, 0)$  имеет вид, представленный на рис. 54. Согласно (70,6) функция  $f(x, t)$  с течением времени будет деформироваться, как это показано на рис. 54. Скорость приближения к оси ординат будет тем больше, чем больше  $f$ . Верхние участки кривой выдвигаются вперед, а нижние оказываются отставшими. В результате функция распределения может настолько вытянуться, что кривая  $f(x, t)$  окажется неоднозначной.

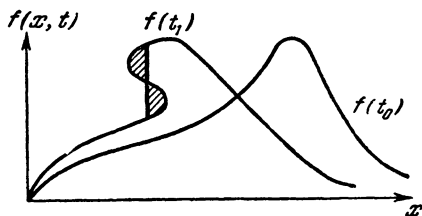


Рис. 54.

Возникает такая же ситуация, как при образовании ударных волн в однородном течении вязкой жидкости. В действительности, однако,  $f(x, t)$  не становится многозначной. При приближении к отвесному (ударному) фронту производная  $\frac{\partial n}{\partial x}$  неограниченно возрастает. При этом нарушается неравенство (70,3) и уравнение (70,4) становится неприменимым. Более того, изменение функции распределения вблизи фронта становится резким и неприменимо и общее уравнение (69,19). Детальная картина движения фронта  $f(x, t)$  в этом случае оказывается гораздо более сложной.

По прошествии времени  $t^*$  начинается второй этап эволюции. В результате процессов поглощения в системе фотонов устанавливается равновесное планковское распределение с температурой фотонов, равной температуре электронов  $T_e$ .

Обратимся теперь ко второму случаю, когда в начальный момент времени выполнено неравенство (70,2). Эволюция спектра фотонов также протекает в два этапа. На первом этапе, при  $t < t^*$ , в системе фотонов устанавливается распределение Бозе — Эйнштейна с химическим потенциалом, отличным от нуля. При этом средняя энергия фотонов становится равной средней энергии электронов. Затем вступают в игру процессы поглощения и излучения. Химический потенциал начинает изменяться во времени и по прошествии времени  $\tau \gg t^*$   $\mu \rightarrow 0$ , т. е. в системе фотонов устанавливается планковское распределение.

## § 71. Подвижность электрона в поле излучения

Прежде чем перейти к рассмотрению поведения системы электронов в поле излучения, следует обсудить важный вопрос о поведении одиночного свободного электрона в поле излучения,