

Поскольку кинетика рассмотренного процесса существенно зависит от формы начального распределения, интересно рассмотреть случай, когда $f(x, 0)$ имеет вид, представленный на рис. 54. Согласно (70,6) функция $f(x, t)$ с течением времени будет деформироваться, как это показано на рис. 54. Скорость приближения к оси ординат будет тем больше, чем больше f . Верхние участки кривой выдвигаются вперед, а нижние оказываются отставшими. В результате функция распределения может настолько вытянуться, что кривая $f(x, t)$ окажется неоднозначной.

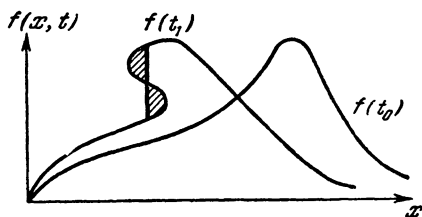


Рис. 54.

Возникает такая же ситуация, как при образовании ударных волн в однородном течении невязкой жидкости. В действительности, однако, $f(x, t)$ не становится многозначной. При приближении к отвесному (ударному) фронту производная $\frac{\partial n}{\partial x}$ неограниченно возрастает. При этом нарушается неравенство (70,3) и уравнение (70,4) становится неприменимым. Более того, изменение функции распределения вблизи фронта становится резким и неприменимо и общее уравнение (69,19). Детальная картина движения фронта $f(x, t)$ в этом случае оказывается гораздо более сложной.

По прошествии времени t^* начинается второй этап эволюции. В результате процессов поглощения в системе фотонов устанавливается равновесное планковское распределение с температурой фотонов, равной температуре электронов T_e .

Обратимся теперь ко второму случаю, когда в начальный момент времени выполнено неравенство (70,2). Эволюция спектра фотонов также протекает в два этапа. На первом этапе, при $t < t^*$, в системе фотонов устанавливается распределение Бозе — Эйнштейна с химическим потенциалом, отличным от нуля. При этом средняя энергия фотонов становится равной средней энергии электронов. Затем вступают в игру процессы поглощения и излучения. Химический потенциал начинает изменяться во времени и по прошествии времени $\tau \gg t^*$ $\mu \rightarrow 0$, т. е. в системе фотонов устанавливается планковское распределение.

§ 71. Подвижность электрона в поле излучения

Прежде чем перейти к рассмотрению поведения системы электронов в поле излучения, следует обсудить важный вопрос о поведении одиночного свободного электрона в поле излучения,

Задача о поведении электрона в поле электромагнитной волны уже обсуждалась нами в § 36 ч. I. Мы видели, что электрон рассеивает падающую на него электромагнитную волну. Ясно, однако, что поскольку при рассеянии происходит передача импульса от волны к электрону, возникает некоторая средняя сила, действующая на частицу, излучающую вторичные (рассеянные) волны. Согласно (29,2) ч. I средняя (за период) сила, действующая на излучающую частицу (в системе отсчета, в которой частица покоится) равна

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} \simeq \frac{2e^2}{3c^3} \left\{ \frac{e\dot{\mathbf{E}}}{m} + \frac{e}{mc} [\dot{\mathbf{v}}\mathbf{H}] \right\} \simeq \\ &\simeq \frac{2e^4}{3m^2c^4} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\overline{\mathbf{E}^2}}{4\pi} \mathbf{l}, \end{aligned}$$

где \mathbf{l} — единичный вектор в направлении распространения волны. Вводя томсоновское эффективное сечение рассеяния и плотность энергии излучения u_0 , приходим к широко известной формуле для лучистого давления:

$$\mathbf{F}_0 = \sigma_T u_0 \mathbf{l} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{q}, \quad (71,1)$$

где \mathbf{q} — поток энергии в одинарной волне. Сила, действующая на электрон, — сила лучистого давления, оказывается не зависящей от частоты. Поэтому силу, действующую на электрон со стороны спектрального поля, образуемого набором волн с различными значениями частоты, также можно представить в виде

$$\mathbf{F}_0 = \frac{\sigma_T}{c} \mathbf{q}. \quad (71,2)$$

Здесь через \mathbf{q} обозначен полный поток энергии в поле излучения

$$\mathbf{q} = \int c\hbar\omega n(\omega, \mathbf{l}) \mathbf{l} d\mathbf{k} = \pi^2 c^4 \int \rho(\omega, \mathbf{l}) \frac{\mathbf{l}}{\omega^2} d\mathbf{k}. \quad (71,3)$$

Вместо плотности энергии мы ввели спектральную функцию.

При переходе от (71,1) к (71,2), т. е. при переходе от силы, действующей на электрон со стороны монохроматической волны, к такой же силе в спектральном поле излучения, молчаливо предполагалось, что имеет место аддитивность сил, действующих на электрон со стороны каждой из волн. При таком суммировании упускался из виду упомянутый выше эффект индуцированного рассеяния. При этом оказалось существенным следующее обстоятельство: если не учитывать ту часть изменения импульса $\Delta \mathbf{p}_2$, которая связана с изменением частоты при рассеянии, и которая, как мы подчеркивали [см. (68,9)], дает малый вклад в изменение импульса, а также не учитывать изме-

нение спектральной зависимости функции распределения при изменении частоты, то вклад индуцированного рассеяния в выражении для давления точно равен нулю.

С другой стороны, как показывает последующий расчет, учет изменения частоты при рассеянии и зависимости n от ω приводит к существенному изменению формулы для давления.

Таким образом, ниже мы должны получить точное выражение для давления без каких-либо произвольных допущений. Под «точным» выражением мы понимаем выражение для давления в классическом нерелятивистском приближении (без учета квантовых и релятивистских поправок). При этом вычислении удобно (хотя в принципе и не обязательно) воспользоваться квантовым подходом, основанным на применении общей формулы для a_i . Переходя в окончательных формулах к классическому пределу $\hbar \rightarrow 0$, мы найдем классическое выражение для средней силы. На этом примере¹⁾ мы убедимся в полезности указанного в предыдущем параграфе методического приема — получения классических формул из квантовых в пределе $\hbar \rightarrow 0$. Согласно (69,8) средняя сила или подвижность дается общей формулой:

$$\langle \Delta p \rangle = \int c (\Delta p_1 + \Delta p_2) n(\mathbf{k}) [1 + n(\mathbf{k}')] d\sigma d\mathbf{k}. \quad (71,4)$$

Учтем теперь, что изменение частоты фотона $\Delta\omega$ при одиночном акте рассеяния на электроном мало²⁾. Соответственно положим $n(\mathbf{k}) \equiv n(\omega, \mathbf{l})$; $n(\mathbf{k}') \equiv n(\omega', \mathbf{l}')$, причем имеем приближенно:

$$n(\omega', \mathbf{l}') \simeq n(\omega, \mathbf{l}') + \frac{\partial n}{\partial \omega} (\omega' - \omega) = n(\omega, \mathbf{l}') - \frac{\partial n}{\partial \omega} \Delta\omega.$$

Вводя, кроме того, вместо чисел заполнения $n(\omega, \mathbf{l})$ спектральное распределение $\rho(\omega, \mathbf{l})$, имеем

$$\begin{aligned} \langle \Delta p \rangle &= \int \left\{ \frac{\hbar\omega}{c} (\mathbf{l} - \mathbf{l}') + \frac{\hbar}{c} (\Delta\omega) \mathbf{l}' \right\} \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} \rho(\omega, \mathbf{l}) \times \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{\pi^2 c^3}{\hbar} \frac{\rho(\omega, \mathbf{l}')}{\omega^3} - \frac{\pi^2 c^3}{\hbar} \Delta\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\rho(\omega, \mathbf{l}')}{\omega^3} \right] \right\} c d\sigma d\mathbf{k} = \\ &= \int \left\{ \frac{\hbar\omega}{c} (\mathbf{l} - \mathbf{l}') + \frac{\hbar^2 \omega^2}{mc^3} \mathbf{l}' (1 - \mathbf{l}\mathbf{l}') \right\} \frac{\pi^2 c^4}{\hbar\omega^3} \rho(\omega, \mathbf{l}) \left\{ 1 + \frac{\pi^2 c^3}{\hbar} \frac{\rho(\omega, \mathbf{l}')}{\omega^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi^2 c^3}{\hbar} \Delta\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\rho(\omega, \mathbf{l}')}{\omega^3} \right] \right\} \frac{2\omega^2 d\omega}{(2\pi c)^3} d\Omega_{\mathbf{k}} d\Omega, \quad (71,5) \end{aligned}$$

¹⁾ См. П. Парадоксов, УФН 89, 707 (1966).

²⁾ Напоминаем, что здесь удобно пользоваться системой покоящегося электрона K_0 . Индекс нуль для простоты опускается.

где $d\Omega_k$ — элемент телесного угла для падающего фотона, а вместо $\Delta\omega$ подставлено значение (68,11).

Перейдем теперь к пределу $\hbar \rightarrow 0$ в формуле (71,5).

Для этого в ней нужно удержать все слагаемые, не содержащие \hbar . При этом для полной силы, действующей на электрон, получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Delta p \rangle &= \int \sigma \frac{\pi^2 c^3}{\omega^2} \rho(\omega, \mathbf{l})(\mathbf{l} - \mathbf{l}') d\mathbf{k} d\Omega + \\ &+ \int \sigma \frac{\pi^4 c}{m\omega^2} \rho(\omega, \mathbf{l}) \rho(\omega, \mathbf{l}') \mathbf{l}' (1 - \mathbf{l}\mathbf{l}') \frac{d\omega}{4\pi^3} d\Omega_k d\Omega - \\ &- \int \sigma \frac{\pi^4 c}{m} \rho(\omega, \mathbf{l}) \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\rho(\omega, \mathbf{l})}{\omega^3} \right] (\mathbf{l} - \mathbf{l}') \omega^2 (1 - \mathbf{l}\mathbf{l}') \frac{d\omega}{4\pi^3} d\Omega_k d\Omega = \\ &= \mathbf{F}_{sp} + \mathbf{F}_{ind}. \quad (71,6) \end{aligned}$$

Подчеркнем, что $\langle \Delta p \rangle$ представляет среднюю силу в классическом приближении. Поэтому точно такое же выражение можно было бы получить из классической электродинамики в результате вычислений, аналогичных (68,8). Вместе с тем нужно иметь в виду, что в рамках классической теории нами не было использовано никакого разложения по малому параметру.

Рассмотрим каждое из слагаемых в (71,6) порознь. Первое слагаемое можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{sp} &= \int \sigma \frac{\pi^2 c^3}{\omega^2} \rho(\omega, \mathbf{l})(\mathbf{l} - \mathbf{l}') d\mathbf{k} d\Omega = \\ &= \sigma_T \pi^2 c^3 \left(\int \rho(\omega, \mathbf{l}) \frac{d\omega}{c^3 4\pi^3} d\Omega_k \right) \mathbf{l} = \mathbf{F}_0. \quad (71,7) \end{aligned}$$

Мы видим, что \mathbf{F}_{sp} представляет силу, обусловленную спонтанным рассеянием. Она совпадает с приведенным выше выражением для силы давления излучения \mathbf{F}_0 . Второе слагаемое,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ind} &= \int \frac{\sigma \pi}{4m} \frac{\rho(\omega, \mathbf{l}) \rho(\omega, \mathbf{l}')}{\omega^2} \mathbf{l}' (1 - \mathbf{l}\mathbf{l}') d\omega d\Omega_k d\Omega - \\ &- \int \frac{\sigma \pi c}{4m} \rho(\omega, \mathbf{l}) \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\rho(\omega, \mathbf{l}')}{\omega^3} \right] (\mathbf{l} - \mathbf{l}') \omega^2 (1 - \mathbf{l}\mathbf{l}') d\omega d\Omega_k d\Omega, \quad (71,8) \end{aligned}$$

как видно из его структуры, представляет силу, обусловленную индуцированным рассеянием. Эта сила содержит под знаком интеграла произведения спектральных функций падающего и рассеянного излучения $\rho(\omega, \mathbf{l})$ и $\rho(\omega, \mathbf{l}')$. Характер силы \mathbf{F}_{ind} зависит от вида функции $\rho(\omega, \mathbf{l})$. Если, в частности, излучение представляет совокупность волн одного направления, то $\rho(\omega, \mathbf{l}') = 0$, и индуцированная сила автоматически обращается в нуль.

Если $\rho(\omega, \mathbf{l})$ представляет равновесное планковское распределение $\rho_n(\omega)$, то после подстановки выражения $\rho_n(\omega)$ и

простых вычислений получается

$$\mathbf{F}_{\text{ind}} \sim \frac{kT}{mc^2} \mathbf{F}_{\text{sp}}. \quad (71,9)$$

Поскольку в нерелятивистской области температура излучения $kT \ll mc^2$, \mathbf{F}_{ind} представляет малую поправку к спонтанной силе \mathbf{F}_{sp} .

Наоборот, в неравновесном поле излучения высокой интенсивности \mathbf{F}_{ind} может быть сравнимо и даже существенно больше \mathbf{F}_{sp} . Таким образом, в общем случае \mathbf{F}_{ind} отнюдь не является малой поправкой к \mathbf{F}_{sp} .

Рассмотрим индуцированную силу давления при некоторых конкретных видах спектрального распределения. Пусть, например, излучателем служит однородная поверхность диска радиусом R . Поскольку все точки диска излучают одинаково, функцию $\rho(\omega, \mathbf{l})$ можно представить в виде

$$\rho(\omega, \mathbf{l}) = G(\omega) \varphi(\mathbf{l}), \quad (71,10)$$

где первый множитель характеризует частотное, а второй — пространственное распределение излучения. Выражение для \mathbf{F}_{ind} приобретает особенно наглядный вид, если задаться простой формой $G(\omega)$, например,

$$G(\omega) = \begin{cases} \frac{a}{\omega^\gamma}, & \omega_0 \leq \omega < \infty, \\ 0, & \omega < \omega_0. \end{cases} \quad (71,11)$$

Кстати, именно таким спектральным распределением обладают некоторые астрономические источники мощного излучения.

Тогда подстановка (71,10) и (71,11) в (71,8) дает

$$\mathbf{F}_{\text{ind}} = \frac{a^2 c \pi}{4m} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^{2\gamma+2}} \int \varphi(\mathbf{l}')(\mathbf{l}) \mathbf{l}' (1 - \mathbf{l} \cdot \mathbf{l}') d\Omega_k d\Omega. \quad (71,12)$$

Второй интеграл в (71,12) обращается в нуль, поскольку его угловая часть изменяет знак при замене $\mathbf{l} \rightarrow -\mathbf{l}'$.

Для диска, на большом расстоянии $r \gg R$ от его поверхности, можно написать

$$\varphi(\mathbf{l}) = \varphi(\beta, \psi) = \Theta(\cos \beta - \cos \beta_0) \cong \Theta(\beta^2 - \beta_0^2), \quad (71,13)$$

где β и ψ — полярный и азимутальный углы, а Θ — ступенчатая функция, β_0 — угол раствора конуса $\beta_0 = \frac{r}{R} \ll 1$. Тогда вычисление (71,12) дает для силы

$$\mathbf{F}_{\text{ind}} = \frac{3\sigma_r \pi^2 (\gamma - 1) \beta_0^2}{8m\omega_0^3 (2\gamma + 1) c} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}. \quad (71,14)$$

Мы видим, что $|\mathbf{F}_{\text{ind}}|$ оказывается пропорциональной q^2 и при

больших значениях потоков излучения (и при малых значениях ω_0) может оказаться существенно большей, чем $|F_{sp}|$.

В качестве второго интересного примера рассмотрим силу давления в резко анизотропном поле. В качестве такого источника выберем два встречных потока излучения. Пусть один из них является когерентным (монохроматическим), направленным в положительную сторону оси z

$$n_1(\omega) = I_1 \delta(\omega - \omega_0). \quad (71,15)$$

Второй пучок, направленный в отрицательную сторону оси z , характеризуется некоторым спектральным распределением $n_2(\omega)$.

Пользуясь общей формулой (71,8) для индуцированного давления, после вычислений приходим к формуле для компонента силы $F_{ind}^{(z)}$:

$$F_{ind}^{(z)} \sim \frac{\hbar^2 \sigma}{m c^5} I_1 \omega^{3/2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [n_2(\omega) \omega^{3/2}] \right\} \Big|_{\omega=\omega_0}. \quad (71,16)$$

Формула (71,16) показывает, что $F_{ind}^{(z)}$ может иметь как положительный, так и отрицательный знак, в зависимости от значения производной

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [n_2(\omega) \omega^{3/2}] \right\} \Big|_{\omega=\omega_0}.$$

Спонтанная сила F_{sp} в рассматриваемом случае всегда направлена в сторону того из пучков, интенсивность которого выше и, соответственно, больше поток энергии q . Таким образом, в зависимости от знака указанной величины и соотношения между абсолютными значениями F_{ind} и F_{sp} , могут реализоваться два случая: 1) когда результирующее давление направлено по вектору полной энергии двух пучков излучения; 2) когда результирующая сила направлена против полного потока излучения.

В заключение приведем выражение для силы спонтанного давления, действующей на движущийся электрон при $v \ll c$. Она получается из (71,3) путем преобразования Лоренца для частоты при $v \ll c$ (доплер-эффект!).

Тогда

$$F_{sp} = - \frac{4}{3} \frac{\sigma_T \mu_0}{c} \frac{p}{m}. \quad (71,17)$$

Аналогично, индуцированная сила имеет вид

$$F_{ind} = \frac{\sigma_T \pi^2}{m^2} p \left[\frac{13}{2} \int \left[\frac{\rho(\omega)}{\omega} \right]^2 d\omega - \frac{14}{15} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\rho(\omega)}{\omega^3} \right] \right\}^2 \omega^6 d\omega \right]. \quad (71,18)$$