§ 72. Система электронов в произвольном поле излучения

Мы теперь можем перейти к нахождению стационарного неравновесного распределения системы электронов, помещенных в заданное поле излучения. Будем считать, что поле излучения является изотропным. При этом функция распределения n зависит только от частоты, но не от направления волнового вектора, т. е. $n = n(\omega)$. В этом простом случае можно наглядно продемонстрировать основные положения теории.

Из (69,4) для стационарного распределения находим

$$-\frac{\partial}{\partial p_i} D_i f + a_i f = j_L, \tag{72,1}$$

где j_L определено формулой (34,8).

Для получения решения (72,1), помимо подвижности, найденной ранее, необходимо знать коэффициент диффузии $D_i = D$. Как и подвижность, коэффициент диффузии является, вообще говоря, функцией импульса.

Для наших целей в выражении для подвижности a_i можно ограничиться приближением

$$a_i = \langle \Delta p_i \rangle \simeq F_{\text{sp}}^{(i)}, \tag{72,2}$$

где $F_{\text{sp}}^{(i)}$ дается формулой (71,17). Причина этого заключается в следующем: как мы увидим в дальнейшем, электроны в поле излучения могут приобретать, вообще говоря, очень высокие энергии. Оказывается, что если слагаемое $\boldsymbol{F}_{\text{ind}}$ в выражении для подвижности (71,6) становится сравнимым с $\boldsymbol{F}_{\text{sp}}$, то приобретаемая средняя энергия электрона становится порядка mc^2. Однако, как мы это подчеркивали с самого начала, вся излагаемая теория ограничена случаем нерелятивистских электронов.

При вычислении коэффициента диффузии по формуле (69,7) можно ограничиться учетом изменения импульса электрона лишь в результате совершенно упругого рассеяния. Учет неупругости рассеяния дает квантовую поправку. Расчет коэффициента диффузии удобно провести в системе отсчета покоящегося электрона

$$D = \langle \Delta p_i^2 \rangle = \frac{c}{3} \int \sigma n_0(\omega_0) [1 + n_0(\omega_0')] (\Delta \boldsymbol{p})^2 \, d\boldsymbol{k}_0 \, d\Omega =$$

$$= \frac{c}{3} \int \sigma \left(\frac{\hbar\omega_0}{c} \right)^2 (\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}')^2 n_0(\omega_0) [1 + n_0(\omega_0')] \, d\boldsymbol{k}_0 \, d\Omega, \tag{72,3}$$

где индексом нуль снабжены число фотонов и их частота в выбранной системе координат.

При переходе к лабораторной системе отсчета следует провести преобразование Лоренца. Оказывается, однако, что при вычислении коэффициента диффузии в нерелятивистском приближении следует учитывать только члены нулевого порядка малости по величине p/mc. Это связано с тем, что в уравнении (72,1) диффузионный коэффициент стоит перед производной $\frac{\partial f}{\partial p_i}$. В результате, как мы увидим ниже, при учете слагаемых порядка p/mc в a_i, в D следует учитывать лишь члены, не зависящие от p. При этом автоматически $\frac{\partial}{\partial p_i}(Df)$ окажется того же порядка малости, что и $a_i f$.

В соответствии с этим можно положить

$$n_0(\omega_0) = n(\omega) = n\left(\omega_0 + \omega_0 \frac{p\cos\theta}{mc}\right) \approx n(\omega_0) + \frac{\partial n}{\partial \omega_0}\cdot\omega_0\frac{p}{mc}\cos\theta$$

и для D получаем

$$D = \int \frac{c}{3}\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 (\cos\theta - \cos\theta')^2 n(\omega)[1+n(\omega)]\,\sigma\, d\Omega\, d\boldsymbol{k} = \\ = \frac{4\pi\sigma_T c}{3}\int\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 n(\omega)[1+n(\omega)]\frac{\omega^2\, d\omega}{(2\pi c)^3}. \qquad (72,4)$$

При подстановке (72,2) и (72,4) в (72,1) получаем окончательно уравнение для функции распределения электронов:

$$\left\{\frac{4\pi\sigma_T c}{3}\int\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 n[1+n]\frac{\omega^2\, d\omega}{(2\pi c)^3}\right\}\frac{\partial f}{\partial p} + \\ + \left\{\frac{16}{3}\frac{\sigma_T\pi}{cm}\int \hbar\omega n\frac{\omega^2\, d\omega}{(2\pi c)^3}\right\} pf + j_L = 0. \qquad (72,5)$$

Будем пытаться искать решение уравнения (72,5) в виде распределения Максвелла с некоторой эффективной температурой θ, т. е. положим

$$f \sim e^{-\frac{p^2}{2m\theta}}. \qquad (72,6)$$

Как мы видели в § 34, максвелловское распределение автоматически обращает в нуль интеграл j_L (при любом значении температуры). Поэтому уравнению (72,5) можно удовлетворить, положив

$$\theta = \frac{\int n(\omega)[1+n(\omega)](\hbar\omega)^2\omega^2\, d\omega}{4\int n(\omega)\hbar\omega\omega^2\, d\omega}. \qquad (72,7)$$

При найденном значении эффективной температуры максвелловское распределение представляет точное решение кинетического уравнения (72,1).