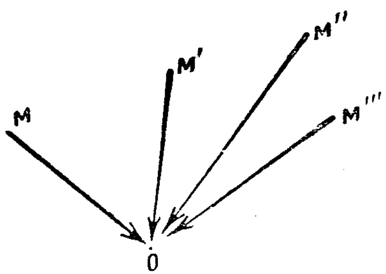
графии в большом ходу также стереографические координаты и бельтрамиевы координаты сферы. Очень замечательная система гауссовых координат определяет положение точки на сфере двумя сопряженными комплексными числами. Этими именно гауссовыми координатами на сфере авторы пользуются в тексте; их аналитическое определение содержится в формулах (22). Координаты λ и μ определяются координатами u_x, u_y, u_z радиуса-вектора точки; из этих уравнений и уравнения поверхности (21) по данным λ и μ, в свою очередь, определяются значения u_x, u_y, u_z, т. е. определяется точка на поверхности шара.

ДОПОЛНЕНИЕ III.

О градиентном векторном поле.

Учение о консервативном силовом поле (VII, рубр. 26—29) представляет собой по существу, частный случай в теории градиентного векторного поля; вообще силовое поле в геометрическом представлении есть частный случай векторного поля. Эту геометрическую сторону дела нам кажется полезным здесь выяснить несколько подробнее.



Под векторным полем разумеют сплошную часть пространства, в каждой точке которой приложен вектор. Если к каждой точке пространства приложим вектор, равный и противоположный ее радиусу-вектору (исходящему от постоянного начала O), то будем иметь векторное поле, это один из простейших примеров векторного поля. Различного рода векторных полей можно себе представить бесчисленное множество. Всякое силовое поле, при векторном изображении сил можно рассматривать как векторное поле.

Если F есть вектор, приложенный в точке $M(x, y, z)$ поля, то его координаты X, Y, Z суть функции от x, y, z:

$$X = X(x, y, z),$$
$$Y = Y(x, y, z),$$
$$Z = Z(x, y, z).$$

Представим себе некоторую кривую MN в векторном поле; ее дугу, содержащуюся между точками M и N, разобьем на элементы; каждый элемент можно рассматривать, как бесконечно малый вектор ds. Пусть F есть вектор поля, приложенный в какой-либо точке элемента кривой. Вычислим скалярное произведение Fds для каждого элемента и составим сумму этих произведений, взятых для всех элементов дуги. Если эта сумма стремится к определенному пределу, когда все элементы кривой стремятся к нулю, то этот предел называют криволинейным интегралом поля, взятым по кривой MN от точки M до точки N.

Так как бесконечно малый вектор ds имеет координаты (компоненты) dx, dy, dz, то

$$\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Криволинейный интеграл можно поэтому представить в виде:

$$\int X dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Если координаты точки кривой выразить через параметр t:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

то

$$dx = x'(t)\,dt, \quad dy = y'(t)\,dt, \quad dz = z'(t)\,dt.$$

Так как X, Y, Z также выражается в функции от t, то значение криволинейного интеграла всегда выражается квадратурой

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} w(t)\,dt, \qquad [!!]$$

где t_0 и t_1 — значения параметра в точках M и N, а $w(t)$ есть функция от (t):

$$w(t) = X(t)\,x'(t) + Y(t)\,y'(t) + Z(t)\,z'(t).$$

Значение криволинейного интеграла в векторном поле, взятого между точками M и N, таким образом, обычно существенно зависит от того, по какой кривой произведено интегрирование. В частных случаях может, однако, оказаться, что значение любого криволинейного интеграла в заданном векторном поле зависит только от положения начальной и конечной точки, а не от пути, по которому интегрирование между этими точками производится. В этом случае векторное поле называется *градиентным*.

Основная относящаяся сюда теорема заключается в том, что криволинейный интеграл (!!) не зависит от пути интегрирования, т. е. векторное поле является градиентным в том и только в том случае, если диференциальный трехчлен $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ есть полный диференциал некоторой функции u, т. е. если имеет место тождество:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU. \qquad [!!!]$$

Доказательство этого предложения в том или ином его выражении можно найти как в любом курсе векторного анализа, так и в общих курсах анализа[1]).

[1]) Такое доказательство можно найти даже в наиболее элементарном учебнике интегрального исчисления Римана.

С другой стороны, чтобы тождественно существовало равенство [!!!], необходимо и достаточно, чтобы компоненты вектора X, Y, Z были связаны соотношениями, приведенными в начале рубр. 27 текста:

$$\frac{\partial Y}{dz}=\frac{\partial Z}{dy}, \quad \frac{\partial Z}{dx}=\frac{\partial X}{dz}, \quad \frac{\partial X}{dy}=\frac{\partial Y}{dx}.$$

Если это имеет место, то векторное поле, как сказано, будет градиентным, а вектор $\boldsymbol{F}$ называется градиентом функции U.

Таким образом силовое поле, о котором идет речь в рубр. 26—29 текста, является консервативным, если представляющее его геометрически векторное поле градиентное. Сила поля в этом случае есть градиент потенциальной функции.