ГЛАВА I.

Теория векторов.

Наиболее отчетливый и гибкий алгорифм для выражения и математического исследования многих проблем механики (как и других физических теорий) представляет теория векторов. Вследствие этого мы в настоящей вводной главе изложим основные понятия и элементарные правила исчисления векторов[1]). Вместе с тем, читатель должен быть предупрежден, что рассуждения, которые развертываются в настоящем сочинении, предполагают отчетливое знакомство с общими курсами аналитической геометрии и анализа бесконечно-малых.

§ 1. Ориентированные отрезки и векторы.

1. Ориентированные отрезки. Точки прямолинейного *отрезка* с концами A и B (конечно, не совпадающими) можно мыслить расположенными либо в *сторону* от A к B, либо в сторону от B к A. Когда отрезку присвоена одна из сторон обращения, например от A к B, то он называется *ориентированным* и обозначается символом AB. Точка A называется *началом*, или *первой конечной точкой* отрезка, а B — *концом* (*свободным концом*), или

[1]) Настоящая глава действительно содержит краткое и отчетливое изложение тех элементов векторного исчисления, которыми авторы пользуются. При всем том читателю очень полезно ознакомиться с исчислением векторов более обстоятельно. Для этого на русском языке могут служить сочинения: 1) *Я. Дубнов*, Основы векторного исчисления, ч. I, Векторная алгебра, 2-е изд., Москва 1933; 2) *Я. Шпильрейн*, Векторное исчисление, Москва 1925; 3) *Я. Френкель*, Курс векторного исчисления с приложениями к механике, Москва 1925; 4) *Н. Е. Кочин*, Векториальное исчисление, 2-е изд., М.—Л. 1933. Для самого первого ознакомления с началами векторной алгебры подходят две главы в сочинении *Г. Филипс*, Диференциальное исчисление, Москва 1931. Из иностранных сочинений наиболее подходящими являются: 1) *C. Burali-Forti* et *R. Marcolongo*, Éléments du calcul vectoriel, Paris 1910; 2) *W. Ignatowsky*, Die Vektoranalysis, I—II, Leipzig 1921; 3) *A. Haas*, Vektoranalysis, Berlin 1924; 4) *J. Spielrein*, Lehrbuch der Vektor-Rechnung, Leipzig 1926; 5) *M. Lagally*, Vorlesungen über Vektor-Rechnung, Leipzig 1928. Последнее сочинение переводится на русский язык.

Векторное исчисление допускает как в обозначениях, так даже и в самом алгорифме различные схемы. В СССР Комиссией по стандартизации установлен стандарт векторных обозначений. Так как схема, которой придерживаются авторы настоящего сочинения, от этого стандарта отличается, то текст при переводе переработан и приведен в соответствие с нашим стандартом. (*Ред.*)

второй конечной точкой отрезка; прямая, на которой отрезок лежит, называется его *линией действия*[1]), или *прямой действия.*

Если тот же отрезок считать обращенным не от A к B, а в противоположную сторону — от B к A, то получим ориентированный отрезок BA, имеющий ту же прямую действия; но для него началом служит точка B, а концом A.

Если точки A и B совпадают, то отрезок AB сводится к единственной точке $A \equiv B$ и называется *нулевым отрезком.* Для нулевого отрезка как прямая действия, так и сторона обращения остаются неопределенными; это единственный случай, в котором противоположные отрезки AB и BA совпадают.

Таким образом ориентированный не нулевой отрезок AB представляет собой геометрический объект, который характеризуется *началом, длиной* (отношением отрезка, ограничиваемого точками A и B, к установленной единице), *направлением* и *стороной обращения.* Во избежание недоразумений следует указать, что под словом „направление" мы разумеем общую характеристику как данной прямой, так и всех параллельных ей прямых, независимо от стороны обращения. Иными словами, два отрезка рассматриваются как имеющие то же направление, если они лежат на одной и той же прямой или на двух параллельных прямых, независимо от того, обращены ли они в одну и ту же или в противоположные стороны.

Для нулевого отрезка остаются неопределенными как линия действия и направление, так и сторона обращения.

2. Эквиполлентные ориентированные отрезки. Два ориентированные отрезка называются эквиполлентными[2]), если они имеют одну и ту же длину, одно и то же направление и обращены в одну и ту же сторону; в частности, это определение приводит к тому, что все нулевые отрезки нужно считать эквиполлентными, поскольку их направление и сторона обращения остаются одинаково неопределенными.

Эквиполлентность двух ориентированных отрезков по самому своему определению обладает основными свойствами равенства: 1) всякий отрезок эквиполлентен самому себе (*свойство рефлективности*); 2) если отрезок AB эквиполлентен отрезку $A'B'$, то отрезок $A'B'$ эквиполлентен AB (*свойство симметрии*); 3) два отрезка, эквиполлентные третьему, эквиполлентны между собой (*свойство транзитивности*).

Из определения эквиполлентности вытекает, далее, что эквиполлентные отрезки совпадают, если они имеют общее начало (или общий конец); вместе с тем, если заданы ориентированный отрезок AB и точка A', то всегда существует один и только один

---

[1]) Это наименование принадлежит авторам; оно имеет в виду механические применения, но шир̆окого распространения не получило. (*Ред.*)

[2]) Авторы пользуются термином „эквиполлентность", принадлежащим *Беллавитису* (*G. Bellavitis*, Methodo delle equipollenze, Padava 1837), которого заслуженно считают отцом векторного исчисления. Мы сохранили этот международный термин, которого отнюдь не следует отождествлять с понятием „эквивалентность". (*Ред.*)

отрезок $A'B'$, эквиполлентный AB (и имеющий, следовательно, началом точку A').

Под *проекцией* ориентированного отрезка AB на заданную прямую или на заданную плоскость разумеют ориентированный отрезок AB_{11}, началом и концом которого соответственно служат ортогональные проекции начала A и конца B заданного отрезка на ту же прямую или плоскость. Совершенно ясно, что *два эквиполлентные ориентированные отрезка имеют эквиполлентные проекции на одну и ту же прямую* (или на две параллельные прямые) *и на одну и ту же плоскость* (или на две параллельные плоскости).

3. Векторы. Если задан ориентированный отрезок AB, то существует ∞^3 эквиполлентных ему отрезков, по одному для каждой точки пространства, принятой за начало; все эти отрезки имеют одинаковые длину, направление и сторону обращения. Объект, который можно привести в соответствие с этим классом ∞^3 ориентированных отрезков, называется *вектором*. Таким образом вектор представляет собой объект, который можно геометрически характеризовать длиной, направлением и стороной обращения прямолинейного отрезка (отвлекаясь, следовательно, от его начала)[1].

Чтобы индивидуализировать такой вектор, мы можем взять ориентированный отрезок AB или какой-либо из эквиполлентных ему отрезков точно так же, как для определения заданного направления мы можем воспользоваться любой из параллельных прямых, а для определения расположения плоскости можно воспользоваться любой из параллельных ей плоскостей.

В частности, все нулевые отрезки представляют один и тот же вектор, называемый *нулевым вектором*; длина этого вектора равна нулю, а его направление и сторона обращения остаются неопределенными. Всякий другой вектор имеет длину, отличную от нуля, и вполне определенное направление, как и сторону обращения.

Векторы обозначаются в печати буквами жирного шрифта, как, например, $\mathbf{v}$; только нулевой вектор обозначается просто нулем (0). Длина вектора $\mathbf{v}$, которую называют также *модулем*

[1]) В литературе по векторному исчислению нет единства в определении вектора. Различные точки зрения приводят, по существу, к двум основным определениям. Одни авторы, например Аппель (P. Appell), Бибербах (Bieberbach), Курант (R. Courant) и др., называют вектором просто ориентированный отрезок; другие, в том числе и авторы настоящего сочинения, разумеют под вектором величину (геометрическую, механическую, физическую), каждое значение которой *может быть отображено* некоторым ориентированным отрезком (как и любым эквиполлентным с ним отрезком). С этой последней точки зрения скорости, ускорения, силы суть векторы, индивидуально изображаемые ориентированными отрезками. Эта точка зрения в последнее время преобладает, а в сочинениях по механике и физике вполне доминирует. На этой точке зрения стоят и авторы настоящего сочинения. Тем не менее как авторы настоящего сочинения, так и другие сторонники последней точки зрения очень часто допускают выражения, которые более соответствуют первой, „геометрической" точке зрения. Когда говорят: отложим от точки A данный вектор,— то это нужно понимать в том смысле, что мы построим ориентированный отрезок, изображающий данный индивидуальный вектор, принимая точку A за начало. Если давать себе в этом совершенно ясный отчет, то ни к каким недоразумениям эта фразеология привести не может. (*Ред.*)

или *тензором*[1]) вектора, обозначается символом mod $\boldsymbol{v}$ или $|\boldsymbol{v}|$, а еще проще той же буквой, которой обозначен вектор, но обыкновенного курсивного шрифта, например mod $\boldsymbol{v} = v$.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным*; можно сказать, что каждый единичный вектор устанавливает определенное ориентированное направление, и обратно.

Единичный вектор, имеющий то же направление и ту же сторону обращения, что и вектор $\boldsymbol{v}$, называется *версором* вектора $\boldsymbol{v}$ и обозначается символом vers $\boldsymbol{v}$.

Наконец, прибавим, что в противоположность векторам или векториальным величинам числа [относительные[2])] и величины, выражаемые такими числами, называются *скалярами*.

4. Ориентированные отрезки в качестве приложенных векторов Чтобы выделить один из ориентированных отрезков, которые могут представлять данный вектор $\boldsymbol{v}$, достаточно, как это отмечено в рубр. 2, указать его начало. Этот ориентированный отрезок AB обыкновенно называют также *вектором, приложенным в точке* A; в отличие от геометрического отрезка AB вектор $\overline{AB}$ мы будем отмечать чертой над буквенным его обозначением ($\overline{AB}$). Чтобы отметить не столько конечные точки отрезка, сколько начало A и самый вектор $\boldsymbol{v}$, его обозначают также символом $(A, \boldsymbol{v})$. По существу, то же достигается, конечно, и обозначением $\overline{AB}$; но обозначение $(A, \boldsymbol{v})$ подчеркивает, что отрезок, выходящий из точки A, отображает вектор $\boldsymbol{v}$[3]).

5. Равные векторы. Два вектора $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ называются *равными*, если они имеют ту же длину, то же направление и ту же сторону обращения; равные векторы могут быть, следовательно, отображены одним и тем же ориентированным отрезком. Можно сказать, что при равенстве векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ они, в сущности, представляют собой один и тот же вектор: равенство векторов как таковых сводится к их тождеству. Равенство в письме обозначается, как обычно, знаком $=$ $(\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2)$; таким образом знак равенства ставится для того, чтобы обозначить, что $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ выражают один и тот же вектор. Отсюда без дальнейших соображений ясно, что знак равенства при этом его употреблении обладает свойствами рефлективности, симметрии и транзитивности.

6. Составляющие вектора. Если спроектируем все (∞^3) ориентированные отрезки, эквиполлентные между собой и отображающие вектор $\boldsymbol{v}$, на все (∞^2) прямые одного и того же направления [или на все (∞^1) плоскости одного и того же расположения], то мы получим ∞^3 ориентированных эквиполлентных между собой отрезков, которые поэтому способны отобразить один и тот же вектор. Этот вектор называется *составляющей* данного вектора $\boldsymbol{v}$ по заданному направлению (или по заданному расположению плоскости).

[1]) Термин „тензор" в этом смысле в настоящее время совершенно выходит из употребления. (*Ред.*)

[2]) Т. е. положительные и отрицательные вещественные числа. (*Ред.*)

[3]) См. примечание на стр. 15. (*Ред.*)

Составляющая вектора $\boldsymbol{v}$, отличного от нуля, равна нулю в том, и только в том, случае, когда прямая или плоскость, проекцией на которую она выражается, перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{v}$; составляющая же нулевого вектора всегда равна нулю, по какой бы прямой или плоскости она ни была взята.

Совершенно ясно, что *равные векторы имеют равные составляющие при любом направлении прямой или любом расположении плоскости проекций.*

7. **Численное выражение составляющей вектора по данному направлению.** Положим, что на данной прямой r фиксирована одна из двух сторон обращения (которая обозначается на чертеже стрелкой); иными словами, мы предположим, что r есть, как обыкновенно говорят, *ориентированная прямая.* Если при этом дан вектор $\boldsymbol{v}$, то мы возьмем *длину его составляющей* по направлению r и притом со знаком $+$ или $-$, смотря по тому, обращена ли эта составляющая в ту же сторону, что и прямая r, или в обратную. Полученное *число* с установленным таким образом знаком мы будем называть *компонентой вектора* $\boldsymbol{v}$ по ориентированному направлению r и будем обозначать его через v_r. Эта компонента не изменяется, если прямая r смещается параллельно самой себе, сохраняя сторону обращения; если сторону обратить, то число только меняет знак.

Фундаментальное значение имеет формула, выражающая v_r через длину v вектора $\boldsymbol{v}$ и угол $\widehat{r\boldsymbol{v}}$, который вектор $\boldsymbol{v}$ образует с ориентированной прямой r [1]). По известной теореме аналитической геометрии имеем:

$$v_r = v\cos\widehat{r\boldsymbol{v}} = v\cos\widehat{\boldsymbol{v}r}; \tag{1}$$

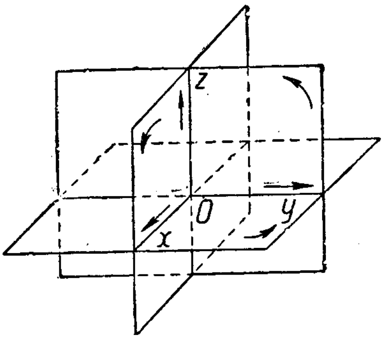
при этом полезно отметить, что формула (1) сохраняет силу и в том случае, когда $\boldsymbol{v}$ представляет собой нулевой вектор, ибо с левой стороны v_r в этом случае равняется нулю по определению, справа v также равно нулю, а $\cos\widehat{\boldsymbol{v}r}$ при неопределенности угла все же представляет собой конечную величину.

---

[1]) Из аналитической геометрии хорошо известно, что под *углом* $\widehat{r_1r_2}$ двух ориентированных прямых r_1 и r_2 разумеют угол, который содержится между 0 и π (включая и эти предельные значения) и образован двумя параллелями к прямым r_1 и r_2, проведенными из произвольной точки O и обращенными каждая в сторону соответствующей параллели r_1, r_2; следует при этом отметить, что это определение является законным, ибо охарактеризованный таким образом угол не зависит от выбора вспомогательной точки O. В случае ориентированной прямой r и вектора $\boldsymbol{v}$ (отличного от нуля) под углом $\widehat{r\boldsymbol{v}}$ разумеют угол, который прямая r образует с любой из ориентированных прямых (параллельных между собой и одинаково обращенных), имеющих направление и сторону обращения вектора $\boldsymbol{v}$; и, аналогично, под углом $\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$ двух векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ (отличных от нуля) разумеют угол двух ориентированных прямых, имеющих направления и стороны обращения соответственно векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$.

Угол $\widehat{r\boldsymbol{v}}$ становится неопределенным, если вектор $\boldsymbol{v}$ обращается в нуль; точно так же неопределенным оказывается угол $\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$, если обращаются в нуль один или оба вектора.

8. Декартов метод задания векторов. Фиксируем ортогональный триэдр декартовых координат $Oxyz$ (фиг. 1) и условимся раз навсегда, что три его оси должны иметь *расположение правостороннего вращения* (или правого винта); это значит: если будем представлять себе ориентированную ось z олицетворенной, то вращение ориентированной оси x, при котором она после поворота на 90° совпадет с ориентированной же осью y, должно происходить справа налево; отсюда следует, что в ту же сторону должно происходить вращение соответственно вокруг ориентированной оси x или y для совмещения после поворота на прямой угол оси y с осью z или оси z с осью x. Здесь важно указать, что в дальнейшем мы всегда будем называть вращение относительно любой ориентированной оси *правосторонним*, если наблюдатель, обращенный головой в сторону этой оси, видит вращение происходящим справа налево; так, это имеет место в указанных вращениях вокруг осей x, y, z. Естественно, что вращение в противоположную сторону мы будем называть *левосторонним*; точно так же мы будем называть *левосторонним* ортогональный триэдр, симметричный правостороннему, а потому на таковой не наложимый. Такой симметричный триэдр мы получим, если обратим в противоположную сторону одну из осей или все три оси.



Фиг. 1.

Что касается самых названий „правосторонний" и „левосторонний" триэдр, то они ведут свое начало от того, что большой, указательный и средний пальцы соответственно правой или левой руки в том порядке, как мы их называем, как бы осуществляют такой правосторонний или левосторонний триэдр.

Заметим еще, что правостороннее вращение происходит для наблюдателя, стоящего по оси вращения (это значит, ось вращения, проходя через его туловище, обращена от ног к голове), в сторону, обратную движению часовой стрелки.

После этих соображений возвратимся к правостороннему триэдру $Oxyz$, который мы выбрали для установления системы декартовых координат. Так как для геометрического определения вектора $\boldsymbol{v}$ достаточно задать ориентированный отрезок AB (произвольно выбранный из ∞^3 отрезков, имеющих ту же длину, то же направление и ту же сторону обращения, что и вектор $\boldsymbol{v}$), то здесь будет достаточно задать координаты x', y', z' и x'', y'', z'' начала A и конца B этого отрезка. Если теперь обозначим через v_x, v_y, v_z компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ по осям (как частные случаи компоненты v_r, о которой шла речь в предыдущей рубрике), то, как известно из аналитической геометрии,

$$v_x = x'' - x', \quad v_y = y'' - y', \quad v_z = z'' - z'. \qquad (2)$$

С другой стороны, если через α, β, γ обозначим направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{v}$, то по формуле (1):

$$v_x = v\alpha, \quad v_y = v\beta, \quad v_z = v\gamma. \tag{3}$$

Две группы формул (2) и (3) непосредственно обнаруживают, что компоненты вектора по осям дают все характерные для него элементы.

В самом деле, из формулы (3) вытекает выражение для длины отрезка AB или вектора $\boldsymbol{v}$:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \tag{4}$$

где радикал нужно понимать в арифметическом его значении. Из этого выражения явствует, что v обращается в нуль в том, и только в том случае, если все три компоненты v_x, v_y, v_z обращаются совместно в нуль. Если мы исключим этот случай, соответствующий нулевому вектору, то ориентированное направление вектора $\boldsymbol{v}$, определяемое соответствующими направляющими косинусами, устанавливается формулами:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \\ \beta &= \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \\ \gamma &= \frac{v_z}{v} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

отсюда, в частности, вытекает, что *компоненты версора* (т. е. единичного вектора, $v = 1$) *совпадают с его направляющими косинусами*.

В общем из формул (2)—(5) явствует, что между векторами в пространстве и тернами (тройками) чисел v_x, v_y, v_z — их компонентами по осям — существует двуоднозначная зависимость[1]; это дает основание называть компоненты вектора также его *координатами* [2].

В заключение здесь будет еще целесообразно указать две формулы, столь же очевидные, как и важные. Если ориентированная прямая r задана своими направляющими косинусами α_1, β_1, γ_1, то для компоненты v_r, по хорошо известной теореме из теории проекций, имеет место соотношение:

$$v_r = v_x\alpha_1 + v_y\beta_1 + v_z\gamma_1. \tag{6}$$

---

[1]) Смысл термина „двуоднозначная зависимость" заключается в том, что по данному вектору $\boldsymbol{v}$ определяются его компоненты v_x, v_y, v_z и, обратно, числами v_x, v_y, v_z определяется вектор $\boldsymbol{v}$.

[2]) Некоторые авторы называют *компонентами* самые векторы, представляющие собой проекции вектора $\boldsymbol{v}$ на оси координат, а численные их значения v_x, v_y, v_z — *координатами* вектора. Принципиально эта терминология более целесообразна. Но термин „компоненты" в том их значении, которое принято в тексте, получил широкое распространение; поэтому авторы решили его в этом именно значении сохранить, хотя и не считают его удачным (они это указывают в первом издании). (*Ред.*)

9. Наконец, если $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ суть два вектора, отличные от нуля, X_1, Y_1, Z_1 — компоненты первого, X_2, Y_2, Z_2 — компоненты второго вектора, а $\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$ — угол между этими векторами, то в силу соотношения (5), с одной стороны, и хорошо известного из аналитической геометрии выражения для косинуса угла между двумя ориентированными прямыми, с другой стороны, получаем соотношение:

$$\cos \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{v_1v_2}. \tag{7}$$

10. Изменение осей координат. Положим, что нам нужно выполнить преобразование координат, взяв новый ортогональный триэдр $\Omega\xi\eta\zeta$, оси которого определяются своими направляющими косинусами по таблице

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

Как известно, эти девять косинусов связаны шестью уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_h^2 + \beta_h^2 + \gamma_h^2 = 1 \quad (h = 1,\ 2,\ 3), \\ &\alpha_h\alpha_k + \beta_h\beta_k + \gamma_h\gamma_k = 0 \quad (h = 1,\ 2,\ 3;\ k = 1,\ 2,\ 3;\ h \neq k); \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

эти уравнения могут быть заменены шестью другими, которые получаются таким же путем, если в предыдущей таблице заменим горизонтали вертикалями. Как известно, эти уравнения выражают тот факт, что элементы каждой горизонтали или вертикали суть направляющие косинусы ориентированной прямой (оси одного триэдра, отнесенной к другому триэдру) и что оси каждого триэдра попарно взаимно перпендикулярны. Напомним еще, что определитель девяти косинусов, — если оси второго триэдра, как мы это всегда предполагаем, также имеют правостороннее расположение, — равен единице; каждый же элемент этого определителя равен своему минору (или алгебраическому дополнению):

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2,\quad \alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3,\quad \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \text{ и т. д. }^{1)}.$$

После этих указаний, которые окажутся полезными впоследствии, возьмем вновь вектор $\boldsymbol{v}$ с компонентами X, Y, Z, относящимися к триэдру Oxy, и обозначим через Ξ, H, Z его компоненты по осям ξ, η, ζ. В силу общего соотношения (6) мы получаем следующие формулы преобразования:

$$\begin{array}{l|l} \Xi = \alpha_1X + \alpha_2Y + \alpha_3Z & X = \alpha_1\Xi + \beta_1\mathrm{H} + \gamma_1\mathrm{Z} \\ \mathrm{H} = \beta_1X + \beta_2Y + \beta_3Z & Y = \alpha_2\Xi + \beta_2\mathrm{H} + \gamma_2\mathrm{Z} \\ \mathrm{Z} = \gamma_1X + \gamma_2Y + \gamma_3Z & Z = \alpha_3\Xi + \beta_3\mathrm{H} + \gamma_3\mathrm{Z} \end{array}$$

---

[1]) Так как эти предложения имеют коренное значение, то мы посвящаем их выяснению и доказательству приложение II, которое полезно прочесть непосредственно после этого текста. (*Ред.*)

Как это можно было, конечно, предвидеть, формулы преобразования компонент одного и того же вектора при переходе от одного координатного триэдра к другому, зависят только от расположения осей нового триэдра относительно первоначального, а не от перенесения начала координат.

2. Сложение и вычитание векторов. Произведение вектора на число.

11. Полигонирование и центрирование векторов. Положим, что нам дано несколько векторов $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$, которые изображаются ориентированными отрезками $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ (фиг. 2). Из произвольной точки P проведем ориентированный отрезок PP_1, эквиполлентный A_1B_1. Из конца P_1 этого отрезка проведем ориентированный отрезок P_1P_2, эквиполлентный A_2B_2; из конца P_2 этого отрезка проведем отрезок P_2P_3, эквиполлентный A_3B_3, и т. д. Это приведет нас в результате к отрезку $P_{n-1}P_n$, эквиполлентному A_nB_n. Это построение называется *полигонированием* отрезков $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ в порядке их задания. Так как, однако, полигон, который мы таким образом получаем, не меняется, если мы любой отрезок A_iB_i заменяем эквиполлентным отрезком $A_i'B_i'$, то все построение определяется, по существу, не столько ориентированными отрезками $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$, сколько самыми векторами $v_1, v_2, \ldots, v_n$; поэтому процесс этот называется проще *полигонированием* векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Если компоненты вектора v_i обозначим через X_i, Y_i, Z_i, координаты точки P — через x, y, z, а координаты точки P_i — через x_i, y_i, z_i, то ясно, что

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = x + X_1, & y_1 = y + Y_1, & z_1 = z + Z_1, \\ x_2 = x_1 + X_2, & y_2 = y_1 + Y_2, & z_2 = z_1 + Z_2, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_{n-1} + X_n, & y_n = y_{n-1} + Y_n, & z_n = z_{n-1} + Z_n. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} x_n = x + X_1 + X_2 + \ldots + X_n = x + \sum_1^n{}_i X_i, \\ y_n = y + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = y + \sum_1^n{}_i Y_i, \\ z_n = z + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = z + \sum_1^n{}_i Z_i. \end{array}\right\} \tag{9a}$$

Здесь суммирование распространяется на значения индекса i от 1 до n, как это и указано при знаке $\sum_i$.

Если все ориентированные отрезки $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ заменить эквиполлентными, исходя не от последовательно получаемых