Как это можно было, конечно, предвидеть, формулы преобразования компонент одного и того же вектора при переходе от одного координатного триэдра к другому, зависят только от расположения осей нового триэдра относительно первоначального, а не от перенесения начала координат.

2. Сложение и вычитание векторов. Произведение вектора на число.

11. Полигонирование и центрирование векторов. Положим, что нам дано несколько векторов $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, ..., $\boldsymbol{v}_n$, которые изображаются ориентированными отрезками $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ (фиг. 2). Из произвольной точки P проведем ориентированный отрезок PP_1, эквиполлентный A_1B_1. Из конца P_1 этого отрезка проведем ориентированный отрезок P_1P_2, эквиполлентный A_2B_2; из конца P_2 этого отрезка проведем отрезок P_2P_3, эквиполлентный A_3B_3, и т. д. Это приведет нас в результате к отрезку $P_{n-1}P_n$, эквиполлентному A_nB_n. Это построение называется *полигонированием* отрезков A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n в порядке их задания. Так как, однако, полигон, который мы таким образом получаем, не меняется, если мы любой отрезок A_iB_i заменяем эквиполлентным отрезком $A_i'B_i'$, то все построение определяется, по существу, не столько ориентированными отрезками $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$, сколько самыми векторами $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$; поэтому процесс этот называется проще *полигонированием* векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$. Если компоненты вектора $\boldsymbol{v}_i$ обозначим через X_i, Y_i, Z_i, координаты точки P — через x, y, z, а координаты точки P_i — через x_i, y_i, z_i, то ясно, что

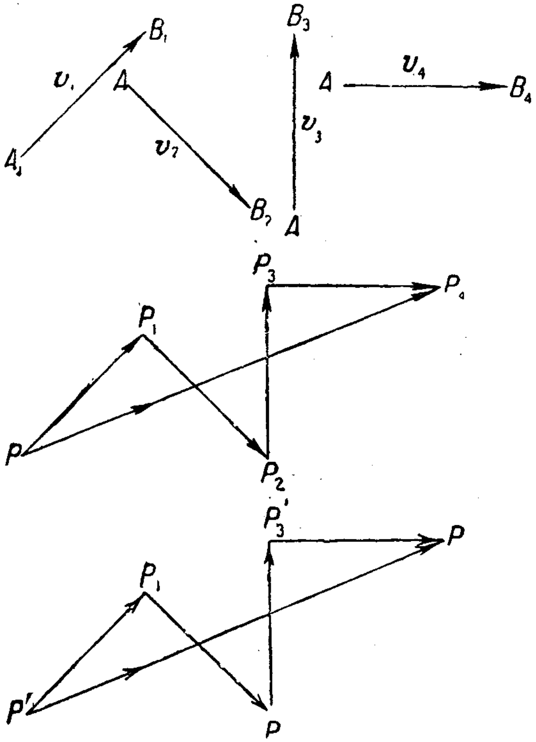
$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = x + X_1, & y_1 = y + Y_1, & z_1 = z + Z_1, \\ x_2 = x_1 + X_2, & y_2 = y_1 + Y_2, & z_2 = z_1 + Z_2, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_{n-1} + X_n, & y_n = y_{n-1} + Y_n, & z_n = z_{n-1} + Z_n. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Отсюда

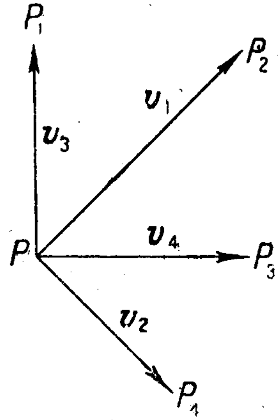
$$\left.\begin{array}{l} x_n = x + X_1 + X_2 + \ldots + X_n = x + \sum_1^n{}_i X_i, \\ y_n = y + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = y + \sum_1^n{}_i Y_i, \\ z_n = z + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = z + \sum_1^n{}_i Z_i. \end{array}\right\} \quad (9a)$$

Здесь суммирование распространяется на значения индекса i от 1 до n, как это и указано при знаке $\sum_i$.

Если все ориентированные отрезки $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ заменить эквиполлентными, исходя не от последовательно получаемых точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$, а от общей начальной точки P (фиг. 3), т. е. если при общей точке P, как начале, построим ориентированные отрезки $PP_1, PP_2, \ldots, PP_n$, изображающие заданные векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, то этот процесс называется *центрированием* данных векторов. Если векторы при центрировании располагаются в одной плоскости, то они называются *компланарными*; иначе говоря, компланарными называются векторы, параллельные одной плоскости. Если векторы при центрировании располагаются на одной прямой, то они называются *коллинеарными*; иначе говоря, коллинеарными называются векторы, параллельные одной и той же прямой, независимо от того, обращены ли они в одну и ту же или в различные стороны. Нулевой вектор, не имеющий определенного направления, можно считать коллинеарным с любым другим вектором и компланарным с любыми двумя векторами.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

12. Сумма векторов [1]. Положим, что нам даны векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$. Если мы их полигонируем, исходя один раз от точки P, другой раз от точки P' (как на нашем чертеже), то самые простые соображения обнаруживают, что ориентированные отрезки PP_n и $P'P_n'$, идущие в том и другом случае от

[1]) Учение о сложении векторов авторы в отличие от нашего стандарта излагают по идеям Грасмана; здесь оно приведено в соответствии с союзным стандартом. См. приложение II. (*Ред.*)

начальной точки P или P' к последней конечной точке P_n или P_n', эквиполлентны между собой, а потому могут быть рассматриваемы как изображения одного и того же вектора $\boldsymbol{v}$; этот вектор называют *суммой* или *результирующей* векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ и обозначают это, как в случае алгебраической суммы:

$$\overline{PP}_n = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \boldsymbol{v}_n. \tag{10}$$

Векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ называются по отношению к вектору $\boldsymbol{v}$ *слагаемыми* или *слагающими*.

Таким образом, *чтобы сложить несколько векторов* (т. е. построить их сумму), *нужно их полигонировать, исходя от любой начальной точки P, и замкнуть получающийся полигон ориентированным отрезком, идущим от начальной точки полигона P к конечной его точке P_n; ориентированный отрезок $\overline{PP}_n$ изобразит вектор, представляющий собою сумму заданных векторов* (*в порядке их задания*).

13. Сумма векторов обладает свойствами коммутативности и ассоциативности. Чтобы проще всего доказать это предложение, заметим, что компоненты вектора $\boldsymbol{v}$, при обозначениях рубр. **11**; выразятся [см. (9)] тремя разностями:

$$x_n - x, y_n - y, z_n - z.$$

Если поэтому обозначим координаты суммы $\boldsymbol{v}$ через X, Y, Z, то в силу соотношений (10):

$$X = \sum_1^n {}_i X_i, \quad Y = \sum_1^n {}_i Y_i, \quad Z = \sum_1^n {}_i Z_i. \tag{11}$$

Эти же равенства непосредственно устанавливают формулированное выше предложение; это вряд ли нуждается в дальнейшем пояснении.

14. Соотношения (11) допускают обобщение столь же простое, как и важное. Если дано какое-либо ориентированное направление, то любую из координатных осей можно направить по этому направлению, и тогда соответствующее равенство (11) приводит к следующему более общему выводу: *компонента суммы нескольких векторов по любому направлению равна сумме компонент слагаемых векторов по тому же направлению.*

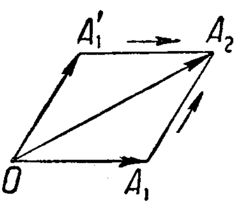
Отсюда вытекает еще следующий вывод: *проекция суммы нескольких векторов на любое направление совпадает с суммой проекций слагаемых векторов на то же направление.*

Это свойство остается в силе и в случае проектирования вектора на заданную плоскость. Чтобы это обнаружить, достаточно принять эту плоскость за одну из координатных плоскостей, скажем, за плоскость xy. Тогда компоненты вектора $\boldsymbol{v}_i$ будут иметь значения X_i, Y_i, Z_i, а компоненты результирующего вектора (суммы) — X, Y, где X и Y попрежнему определяются первыми двумя равенствами (11); а эти равенства и обнаруживают, что *проекция результирующего вектора (суммы) совпадает с результирующей (или суммой) проекций слагаемых векторов.*

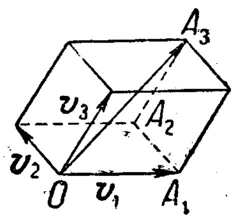
15. В случае двух векторов v_1, v_2 их результирующая

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

выражается диагональю OA_2 параллелограма $OA_1A_2A_1'$, который получается, если мы центрируем данные векторы в точке O и полученные два отрезка дополним до параллелограма (фиг. 4); в самом деле, ориентированный отрезок OA_2 можно рассматривать, как замыкающий полигон OA_1A_2 (или $OA_1'A_2$), стороны которого изображают векторы v_1 и v_2 (или v_2 и v_1). Самый этот параллелограм или любой другой с эквиполлентными сторонами, построенный при другом начале центрирования, называется *параллелограмом данных двух векторов.*



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Точно так же для трех некомпланарных (т. е. не параллельных одной и той же плоскости, см. рубр. **11**) векторов v_1, v_2, v_3 результирующий вектор

$$v_1 + v_2 + v_3 = v_2 + v_3 + v_1 = v_3 + v_1 + v_2 = v_3 + v_2 + v_1 = \\ = v_1 + v_3 + v_2 = v_2 + v_1 + v_3$$

выражается диагональю параллелепипеда, построенного на данных трех векторах (т. е. имеющего эти три вектора своими ребрами, фиг. 5).

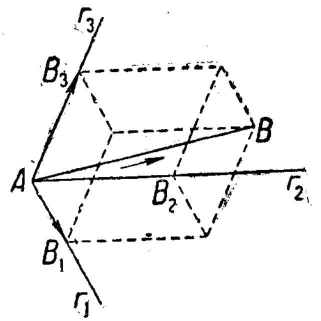
16. Разложение вектора на слагающие векторы. Совершенно ясно, что любой вектор v можно себе представить разложенным бесчисленным множеством различных способов на сумму произвольного числа (слагающих или слагаемых) векторов. В самом деле, если вектор v изображен ориентированным отрезком AB, и $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ суть произвольно выбранные $n-1$ точек, то

$$\overline{AB} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}B}.$$

Но некоторые из этих многообразных разложений находят себе применение особенно часто; на них мы остановимся подробно.

Прежде всего предположим, что нам даны три некомпланарные (т. е. не параллельные одной и той же плоскости) направления r_1, r_2, r_3. Через произвольную точку A проведем отрезок AB, представляющий вектор v, и три прямые, имеющие направление r_1, r_2, r_3 (фиг. 6). Далее, через точку B проведем плоскости, параллельные плоскостям r_2r_3, r_3r_1, r_1r_2, которые пересекут прямые r_1, r_2, r_3 в точках B_1, B_2, B_3. Теперь три пары плоскостей определят параллелепипед, в котором отрезок AB служит диагональю; ребра же его AB_1, AB_2, AB_3 определяют слагающие векторы таким образом, что

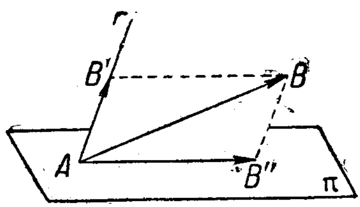
$$v = \overline{AB_1} + \overline{AB_2} + \overline{AB_3}.$$



Фиг. 6.

Таким образом *каждый вектор может быть однозначно разложен на три слагающие вектора по данным трем некомпланарным направлениям*; однозначность разложения непосредственно вытекает из построения. Эти три слагающие часто называют также *слагающими* вектора v по заданным трем направлениям.

Совершенно ясно, что одна из этих трех слагающих обращается в нуль в том, и только в том, случае, если вектор v компланарен с двумя из заданных трех направлений; две слагающие исчезают, когда вектор v *коллинеарен* с одним из этих трех направлений (т. е. параллелен прямым, имеющим это направление).



Фиг. 7.

Теперь в качестве второго, весьма часто встречающегося, разложения приведем следующее. Положим, что нам даны направления прямой и плоскости [1]), по которым нужно произвести разложение вектора.

Через начальную точку A данного вектора проводим прямую r заданного направления и плоскость π, также заданного направления (фиг. 7). Теперь через конечную точку B нашего вектора проводим плоскость, параллельную π, до пересечения с прямой r в точке B' и прямую, параллельную r, до пересечения с плоскостью π в точке B''. Четырехугольник $AB'BB''$

[1]) Когда говорят о направлении прямой, то разумеют геометрический признак, принадлежащий всем параллельным между собою прямым и отличающий их от других (им не параллельных) прямых. В оригинале настоящего сочинения авторы выражают его словом direzione. По аналогии, авторы систематически говорят и о направлении или расположении плоскости, также разумея под этим геометрический признак, принадлежащий совокупности параллельных плоскостей и отличающий их от других (им не параллельных) плоскостей. Авторы пользуются для выражения этого понятия термином giacitura (собственно „расположение", giacere — лежать). В настоящем переводе понятие это передается либо термином „направление плоскости", либо, где это уместнее, термином двумерное направление". (*Ред.*)

представляет собою параллелограм, имеющий диагональю отрезок AB, а сторонами AB' и AB''; вместе с тем

$$v = \overline{AB} = \overline{AB'} + \overline{AB''}.$$

Векторы $\overline{AB'}$ и $\overline{AB''}$ называются *слагающими* вектора v по направлению прямой r и направлению плоскости π.

17. Произведение вектора на число. Если v есть данный вектор, а n — данное целое положительное число, то сумма n векторов, равных v, есть, по определению, вектор, имеющий то же направление и ту же сторону обращения, что и вектор v; длина же его равна nv. Этот вектор называется произведением вектора v на целое число n и обозначается через nv.

В обобщение этого называют *произведением вектора на любое вещественное число* a вектор, имеющий длину $|a|v$, то же направление, что и вектор v, и обращенный в ту же сторону, что и v, если a есть число положительное, и в противоположную сторону, если a есть число отрицательное. Это произведение обозначается символами av или va — безразлично. По самому определению произведение av обращается в нуль только в том случае, если обращается в нуль либо вектор v, либо число a (либо, конечно, a и v совместно). Таким образом вектор av всегда коллинеарен с вектором v.

Обратно, если вектор v' коллинеарен с вектором v и последний отличен от нуля, то всегда существует одно, и только одно, вещественное число a, при котором

$$v' = av; \tag{12}$$

абсолютная величина этого числа равна отношению длин $\frac{v'}{v}$; оно должно иметь знак $+$, если вектор v' обращен в ту же сторону, что и v, и знак $-$, если он обращен в противоположную сторону; если $v' = 0$, то $a = 0$. Предыдущее равенство выражает, таким образом, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вектор v' был коллинеарен с v. Так как, однако, это условие предполагает, что $v \neq 0$, и ставит вектор v' в несколько иное положение, чем v, то ему придают более симметричную и более общую форму, исключающую всякие изъятия: *для того чтобы два вектора v_1 и v_2 были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали два числа a_1 и a_2, из которых, по крайней мере, одно отлично от нуля и при которых*

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0. \tag{12a}$$

Если, скажем, $a_1 \neq 0$, то мы разрешим это уравнение относительно v_1, и оно примет прежнюю форму (12).

Остановимся еще на простейших частных случаях. Если в формуле (12) $a = -1$, то умножение приводит к вектору $(-1)\,v$, имеющему ту же длину и то же направление, что и v, но обращенному в противоположную сторону; такой вектор называют *противоположным* вектору $\boldsymbol{v}$ и обозначают просто символом $-\boldsymbol{v}$.

В силу предыдущего определения для каждого вектора

$$\boldsymbol{v} = v \operatorname{vers} \boldsymbol{v}.$$

Кроме того, если вектор $\boldsymbol{v}$ имеет по отношению к какой-либо системе координат компоненты X, Y, Z, то вектор $a\boldsymbol{v}$ имеет компоненты aX, aY, aZ.

Для произведения вектора на число имеют место тождества:

$$a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v} = (a+b)\,\boldsymbol{v}, \quad a\,(b\boldsymbol{v}) = ab\boldsymbol{v}, \quad a\boldsymbol{v}_1 + a\boldsymbol{v}_2 = a\,(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2).$$

Доказательство первых двух из этих тождеств непосредственно ясно; что касается третьего, то его, конечно, было бы нетрудно провести на основании определения предыдущей рубрики; но это можно сделать проще, если обнаружить, что векторы, занимающие обе части равенства, имеют одинаковые компоненты по любой оси [1]).

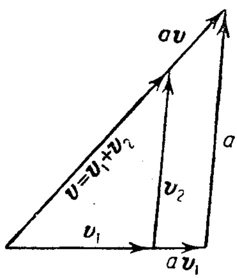
18. Комбинируя определение произведения вектора на число с определением суммы любого числа векторов, мы видим, что любое линейное выражение вида $\sum_1^n {}_i a_i \boldsymbol{v}_i$ представляет собою определенный вектор; его компоненты имеют значения:

$$\sum_1^n {}_i a_i X_i, \quad \sum_1^n {}_i a_i Y_i, \quad \sum_1^n {}_i a_i Z_i.$$

Остановимся на случае $n=2$. Мы уже видели выше, что при надлежащих значениях числа a_1 и a_2 вектор

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 \tag{13}$$

обращается в нуль, когда векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ коллинеарны. Если векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ не коллинеарны, то они совместно определяют некоторое двумерное направление, а при центрировании — плоскость этого направления. Ясно, что в этой плоскости лежат также векторы $a_1\boldsymbol{v}_1$ и $a_2\boldsymbol{v}_2$, а также их сумма $\boldsymbol{v}$ (13). Итак, вектор, определяемый линейным выражением (13), компланарен с векторами $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Обратно, если вектор $\boldsymbol{v}$ компланарен с двумя неколлинеарными векторами $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, то он разлагается на два слагающие вектора по направлениям $\boldsymbol{v}_1$



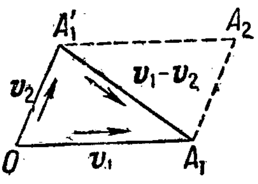
Фиг. 8.

[1]) Все-таки очень поучительно уяснить себе и геометрический смысл третьего равенства. Векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ при полигонировании приводят к треугольнику, третьей стороной которого служит их сумма $\boldsymbol{v}$ (фиг. 8). Составив произведения $a\boldsymbol{v}_1$ и $a\boldsymbol{v}_2$ и полигонируя их, мы получим треугольник, подобный первому; третья его сторона представит поэтому вектор $a\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v}_1 + a\boldsymbol{v}_2$.

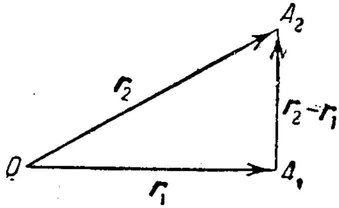
и v_2; эти слагающие по формуле (13) выражаются произведениями a_1v_1 и a_2v_2 с надлежащими коэфициентами a_1 и a_2, а поэтому вектор v может быть представлен линейным выражением (13). Соотношение (13) представляет собою, таким образом, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вектор v был компланарен с двумя неколлинеарными векторами v_1 и v_2. В более общей форме, не имеющей никаких изъятий, это предложение выражают еще так: *для того чтобы три вектора v_1, v_2, v_3 были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали три числа a_1, a_2, a_3, не обращающиеся совместно в нуль, при которых*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0. \tag{12b}$$

Очень важным частным случаем вектора, компланарного с векторами v_1 и v_2, является их *разность* $v_1 - v_2$, т. е. вектор,



Фиг. 9.



Фиг. 10.

сложение которого с вектором v_2 дает вектор v_1; он изображается второй диагональю $A_1'A_1$ параллелограма $OA_1A_2A_1'$, построенного на векторах v_1 и v_2 (фиг. 9); точнее: чтобы построить разность $v_1 - v_2$ векторов v_1 и v_2, можно поступить следующим образом: *центрировать оба вектора при произвольной точке O и построить вектор, идущий от конца вектора v_2 (вычитаемого) к концу вектора v_1.*

В тесной связи с этим стоит соотношение между вектором и радиусами-векторами его концов. Часто бывает целесообразно определять положение любой точки пространства A векторными средствами относительно некоторой фиксированной точки O — *начала*, играющего здесь ту же роль, что и начало координат в аналитической геометрии. Вектор r, идущий от начала O к точке A [1]), называется *радиусом-вектором* точки A. При фиксированном начале положение точки вполне определяется ее радиусом-вектором. Любой вектор A_1A_2 всегда равен разности радиусов-векторов конца (r_2) и начала (r_1) отрезка A_1A_2, изображающего этот вектор (фиг. 10):

$$v = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1} = r_2 - r_1.$$

В заключение заметим, что все правила буквенного исчисления с относительными числами (имеющими знак + или —),

[1]) Полагаем, что такого рода сокращенное выражение, вместо которого, следовало бы сказать „вектор, изображаемый ориентированным отрезком, идущим от начала O к точке A", — уже не может смутить читателя. (*Ред.*)

относящиеся к преобразованию суммы или разности алгебраических многочленов, к умножению многочлена на число, к приведению подобных членов, применяются без изменений к векториальным выражениям вида $\sum a_i \boldsymbol{v}_i$. Это вытекает из предложений рубр. **13**, а также из определений и тождеств, установленных в рубр. **15**.

19. Разложение векторов приводит к очень важному способу выражения вектора. Если O есть начало осей координат, X, Y, Z — компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ относительно этих осей, то мы можем разложить вектор $\boldsymbol{v}$ на слагающие по этим осям, причем X, Y, Z будут численные значения этих слагающих (взятые с надлежащими знаками). Если мы приложим вектор $\boldsymbol{v}$ к началу O, то концом его будет служить точка Q с координатами X, Y, Z; если обозначим через Q_1, Q_2, Q_3 проекции точки Q на три оси, то будем иметь (рубр. **13**):

$$\boldsymbol{v} = \overline{OQ} = \overline{OQ_1} + \overline{OQ_2} + \overline{OQ_3}.$$

Теперь обозначим через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ три единичных вектора, которые имеют каждый направление и сторону обращения соответствующей ориентированной оси x, y, z; эти три единичных вектора называются *основными версорами* установленного координатного триэдра. В силу соотношения (12):

$$\overline{OQ_1} = X\boldsymbol{i}, \quad \overline{OQ_2} = Y\boldsymbol{j}, \quad \overline{OQ_3} = Z\boldsymbol{k}.$$

Отсюда получаем выражение:

$$\boldsymbol{v} = \overline{OQ} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k},$$

играющее в векторном исчислении коренную роль, как векторно-координатное задание данного вектора.

В тесной связи с этим находится соотношение, которым в дальнейшем придется пользоваться очень часто. Пусть x, y, z будут координаты произвольной точки P. Эти же числа служат компонентами радиуса-вектора $\overline{OP}$ точки P. Поэтому

$$\overline{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{14}$$

3. Скалярное произведение и векторное произведение двух векторов.

20. Скалярное произведение. Если даны два вектора $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, отличные от нуля, то под *скалярным произведением* их разумеют число $v_1 v_2 \cos \widehat{\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2}$, т. е. произведение длин этих векторов на косинус образуемого ими угла. Так как это произведение стремится к нулю, когда один из двух векторов или оба вместе стремятся к нулю (в каковом случае угол между векторами становится неопределенным), целесообразно приписать скалярному произведению значение нуль в том случае, когда, по крайней мере, один из этих векторов равен нулю.