относящиеся к преобразованию суммы или разности алгебраических многочленов, к умножению многочлена на число, к приведению подобных членов, применяются без изменений к векториальным выражениям вида $\sum a_i \boldsymbol{v}_i$. Это вытекает из предложений рубр. **13**, а также из определений и тождеств, установленных в рубр. **15**.

19. Разложение векторов приводит к очень важному способу выражения вектора. Если O есть начало осей координат, X, Y, Z — компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ относительно этих осей, то мы можем разложить вектор $\boldsymbol{v}$ на слагающие по этим осям, причем X, Y, Z будут численные значения этих слагающих (взятые с надлежащими знаками). Если мы приложим вектор $\boldsymbol{v}$ к началу O, то концом его будет служить точка Q с координатами X, Y, Z; если обозначим через Q_1, Q_2, Q_3 проекции точки Q на три оси, то будем иметь (рубр. 13):

$$\boldsymbol{v}=\overline{OQ}=\overline{OQ_1}+\overline{OQ_2}+\overline{OQ_3}.$$

Теперь обозначим через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ три единичных вектора, которые имеют каждый направление и сторону обращения соответствующей ориентированной оси x, y, z; эти три единичных вектора называются *основными версорами* установленного координатного триэдра. В силу соотношения (12):

$$\overline{OQ_1}=X\boldsymbol{i},\quad \overline{OQ_2}=Y\boldsymbol{j},\quad \overline{OQ_3}=Z\boldsymbol{k}.$$

Отсюда получаем выражение:

$$\boldsymbol{v}=\overline{OQ}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k},$$

играющее в векторном исчислении коренную роль, как векторно-координатное задание данного вектора.

В тесной связи с этим находится соотношение, которым в дальнейшем придется пользоваться очень часто. Пусть x, y, z будут координаты произвольной точки P. Эти же числа служат компонентами радиуса-вектора $\overline{OP}$ точки P. Поэтому

$$\overline{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{14}$$

3. Скалярное произведение и векторное произведение двух векторов.

20. Скалярное произведение. Если даны два вектора $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, отличные от нуля, то под *скалярным произведением* их разумеют число $v_1 v_2 \cos \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$, т. е. произведение длин этих векторов на косинус образуемого ими угла. Так как это произведение стремится к нулю, когда один из двух векторов или оба вместе стремятся к нулю (в каковом случае угол между векторами становится неопределенным), целесообразно приписать скалярному произведению значение нуль в том случае, когда, по крайней мере, один из этих векторов равен нулю.

В том и другом случае скалярное произведение вектора $\boldsymbol{v}_1$ на вектор $\boldsymbol{v}_2$ обозначается через $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ (читается: $\boldsymbol{v}_1$ скалярно на $\boldsymbol{v}_2$).

Если через X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 обозначим компоненты векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, то из соотношения (7) непосредственно вытекает следующее формальное выражение скалярного произведения:

$$\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = v_1 v_2 \cos(\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2; \tag{15}$$

следует также отметить, что эта формула остается в силе и тогда, когда один из двух векторов или даже оба обращаются в нуль: в этом случае как правая, так и левая части равенства (15) обращаются в нуль.

Из предыдущих определений следует, что скалярное произведение $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ обращается в нуль в том, и только в том, случае, если заданные векторы взаимно перпендикулярны или же, по крайней мере, один из них равен нулю. Иными словами, если векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ отличны от нуля, то исчезновение их скалярного произведения $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ есть необходимое и достаточное условие их перпендикулярности. Вследствие этого, если оказывается, что скалярное произведение вектора $\boldsymbol{v}_1$ на *любой* другой вектор $\boldsymbol{v}_2$ равно нулю, то отсюда можно заключить, что $\boldsymbol{v}_1 = 0$; в самом деле, в противном случае достаточно было бы взять за $\boldsymbol{v}_2$ вектор, отличный от нуля и не перпендикулярный к $\boldsymbol{v}_1$, чтобы произведение $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ оказалось отличным от нуля.

Если векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ отличны от нуля, то произведение $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ имеет положительное или отрицательное значение в зависимости от того, образуют ли эти векторы острый или тупой угол.

Произведение $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$ вектора на самого себя, которое обыкновенно обозначают короче через $\boldsymbol{v}^2$, совпадает с квадратом длины вектора v^2 (так как $\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}} = 0$); поэтому условие $\boldsymbol{v}^2 = 1$ характеризует единичный вектор.

В частности, основные версоры ортогонального координатного триэдра характеризуются шестью соотношениями:

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1, \qquad \boldsymbol{i}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{j} = 0. \tag{16}$$

Выражение $v_1 v_2 \cos\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$ для скалярного произведения $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ обнаруживает, что его можно рассматривать как *произведение* (алгебраическое) *длины одного вектора на компоненту другого вектора по направлению первого.*

Сделаем еще одно важное замечание. Если мы возьмем за ось проекций направление вектора $\boldsymbol{v}_1$, но обращенное в противоположную сторону, то компоненты векторов на это направление будут:

$$-v_1 \quad \text{и} \quad -v_2\cos\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}.$$

Вследствие этого тождество

$$\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = (-v_1)(-v_2\cos\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2})$$

обнаруживает, что *скалярное произведение двух векторов равно произведению* (*алгебраическому*) *их компонент по линии действия* (рубр. 1) *одного из них, в какую бы сторону оно ни было ориентировано* (но, конечно, одинаково при проектировании обоих векторов).

Наконец, небесполезно будет четко отметить, что *скалярное произведение* $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ *какого угодно вектора* $\boldsymbol{v}$ *на единичный вектор* $\boldsymbol{u}$ *представляет в векторной форме компоненту вектора* $\boldsymbol{v}$ *по ориентированному направлению* $\boldsymbol{u}$; это непосредственно вытекает из сопоставления формул (15) и (1).

21. Как из определения скалярного произведения, так и из выражения его в компонентах (15) непосредственно вытекает, что для скалярного произведения имеет место свойство коммутативности:

$$\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1; \tag{16a}$$

между тем свойство ассоциативности в этом случае отпадает. В самом деле, так как $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ есть скаляр, то о скалярном произведении вектора $\boldsymbol{v}_3$ на $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ не может быть речи.

Но зато остается в силе свойство дистрибутивности по отношению к сумме векторов:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2. \tag{16b}$$

Чтобы это обнаружить, покажем прежде всего, что имеет место тождество:

$$\operatorname{vers}\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\operatorname{vers}\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}_1+\operatorname{vers}\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}_2\ ^{1)}.$$

В самом деле, так как $\operatorname{vers}\boldsymbol{v}$ есть единичный вектор, то это равенство выражает только, что компонента суммы $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ на ориентированное направление вектора $\boldsymbol{v}$ равна сумме компонент слагающих векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ на то же направление. Теперь достаточно помножить обе части последнего равенства на v, чтобы получить соотношение (16b).

В результате этого для скалярного произведения остаются в силе правила обыкновенного алгебраического умножения, основанные на свойствах коммутативности и дистрибутивности. В частности, перемножение многочленов, представляющих алгебраические суммы векторов, совершается по правилу перемножения алгебраических полиномов.

На этом основании можно вновь получить выражение (15) для скалярного произведения $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ в компонентах X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ по ориентированным направлениям осей координат. Для этого достаточно вычислить произведение:

$$(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\,(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}),$$

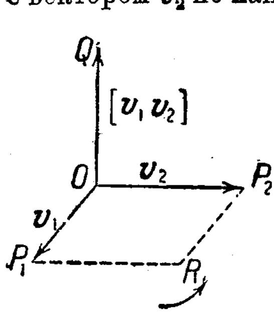
принимая во внимание соотношения (16).

---

[1]) Иначе говоря, рассматривается сначала случай, когда первый множитель есть единичный вектор. (*Ред.*)

Полезно еще отметить, что основные версоры i, j, k триэдра $Oxyz$, будучи отнесены к другому триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$, имеют компонентами направляющие косинусы α_i, β_i, γ_i ($i=1$, 2, 3) (рубр. 8); вследствие этого соотношения (16) непосредственно приводят к равенствам (7).

22. Векторное произведение. Пусть будут заданы два вектора v_1 и v_2, отличные от нуля, неколлинеарные между собой, и притом в определенном порядке (т. е. первый и второй, согласно обозначению). В любой плоскости, параллельной обоим векторам (двумерное направление которой [1]), таким образом, определяется заданными двумя векторами), установим по ним определенную сторону вращения. Для этого центрируем векторы v_1 и v_2 в точке O этой плоскости и представим себе, что вектор v_1 поворотом вокруг O на угол, меньший π, приводится в совмещение с вектором v_2 по направлению и по стороне обращения (фиг. 11); ту сторону, в которую совершается этот поворот, мы и будем считать установленной в этой плоскости стороной вращения. Вместе с тем векторы v_1 и v_2 дают возможность отличать одну от другой две стороны любой прямой, не параллельной нашей плоскости (можно сказать, не принадлежащей двумерному направлению, которое определяется векторами v_1 и v_2); одной из этих сторон прямой является та, по отношению к которой установленное вращение является правосторонним (т. е. сторона u, образующая с векторами v_1 и v_2 правосторонний триэдр v_1, v_2, u), а другой — противоположная сторона. На основе этих соображений устанавливается еще другое умножение векторов, при котором произведением служит не число, а *вектор*; это произведение называют поэтому *векториальным* или *векторным*.



Фиг. 11.

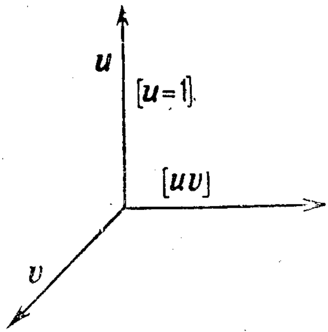
Векторным произведением двух векторов v_1 и v_2, в этом порядке взятых, называют *вектор* u, длина которого выражается числом $v_1 v_2 \sin \widehat{v_1 v_2}$, направление которого перпендикулярно к плоскости $v_1 v_2$, а сторона обращения выбрана так, что по отношению к ней вращение от v_1 к v_2 представляется правосторонним (фиг. 11). Иными словами, длина векторного произведения вектора v_1 на вектор v_2 численно равна площади параллелограма, определяемого этими векторами (на нашем чертеже параллелограма OP_1RP_2); направление его перпендикулярно к двумерному направлению, определяемому векторами v_1 и v_2 (на нашем чертеже перпендикулярно к плоскости P_1OP_2); сторона обращения вектора u такова, что $v_1 v_2 u$ есть правосторонний триэдр. Векторное произведение векторов v_1 и v_2 обозначается символом $[v_1 v_2]$; читается: „v_1 векторно на v_2". Так как вектор $[v_1 v_2]$

---

[1]) См. примечание на стр. 25. (*Ред.*)

лежит *вне* плоскости $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, то векторное произведение часто называют, следуя Грасману [1]), *внешним произведением* [2]).

23. Если один из двух векторов обращается в нуль или если эти векторы коллинеарны (т. е. $\sin \widehat{\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2} = 0$), то предыдущее определение все же остается в силе: направление и сторона обращения вектора $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ остаются в этом случае неопределенными, но длина его равна нулю; иначе говоря, в этом случае $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ есть нулевой вектор. Если же оба вектора $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ отличны от нуля, то их векторное произведение может обратиться в нуль только тогда, когда $\sin \widehat{\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2} = 0$, т. е. когда векторы коллинеарны. Таким образом для *двух векторов, отличных от нуля, обращение в нуль их векторного произведения представляет собою необходимое и достаточное условие их коллинеарности.* Как и в случае скалярного произведения, если известно, что векторное произведение $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ вектора $\boldsymbol{v}_1$ на любой вектор $\boldsymbol{v}_2$ равно нулю, то отсюда можно заключить, что $\boldsymbol{v}_1 = 0$; в противном случае достаточно было бы взять вектор $\boldsymbol{v}_2$, отличный от нуля и не коллинеарный с $\boldsymbol{v}_1$, и произведение $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ было бы отлично от нуля.



Фиг. 12.

24. Следует твердо помнить, что вектор $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$, если он не обращается в нуль, всегда перпендикулярен к каждому из векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. В частности, если $\boldsymbol{u}$ есть единичный вектор, перпендикулярный к данному вектору $\boldsymbol{v}$, то вектор $[\boldsymbol{uv}]$ имеет ту же длину, что и $\boldsymbol{v}$ (ибо $u = 1$, $\sin \widehat{\boldsymbol{uv}} = 1$), перпендикулярен к векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ и обращен таким образом, что векторы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ и $[\boldsymbol{uv}]$ образуют правосторонний ортогональный триэдр. Но в таком случае и векторы $\boldsymbol{v}$, $[\boldsymbol{uv}]$ и $\boldsymbol{u}$ образуют триэдр правого вращения. Это можно интерпретировать следующим образом: вектор $[\boldsymbol{uv}]$ представляет собою результат поворота вектора $\boldsymbol{v}$ вокруг оси $\boldsymbol{u}$ на прямой угол справа налево. Иначе говоря, *умножить произвольный вектор $\boldsymbol{v}$ на перпендикулярный к нему единичный вектор $\boldsymbol{u}$ в порядке $[\boldsymbol{uv}]$—значит повернуть вектор $\boldsymbol{v}$ вокруг оси $\boldsymbol{u}$ справа*

---

1) Герман Грасман (Hermann Grassmann) родился в Штеттине в 1809 г. и жил в этом городе почти постоянно до своей смерти (1877). Мы обязаны ему оригинальным геометрическим исчислением, которое объемлет векторное исчисление как частный случай. Оно было опубликовано Грасманом в 1844 г. и в глубоко переработанном виде — в 1862 г. под названием „Ausdehnungslehre". Оно находит себе применение во многих вопросах не только геометрии, но также механики и математической физики.

2) Авторы употребляют для скалярного произведения знак $\times$ $(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)$, а для векторного произведения знак $\wedge$ $(\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2)$; но эти обозначения, как указано в предисловии, противоречат нашему стандарту. Принятое последним обозначение $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ ведет свое начало еще от Грасмана и сохраняет в мировой литературе еще наибольшее распространение. (*Ред.*)

налево на прямой угол. Отсюда и название единичного вектора — версор (вращающий вектор, см. рубр. 3).

25. По определению, векторное произведение $[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1]$ имеет то же численное значение (ту же длину), что и $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$; если оно отлично от нуля, то оно имеет и то же направление; но вектор $[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1]$ обращен не в ту сторону, что $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$, а в противоположную; в самом деле, на прямой, перпендикулярной к плоскости векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, сторона, относительно которой ориентированный угол $\widehat{\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1}$ (т. е. угол между двумя ориентированными прямыми; см. примечание на стр. 17) представляется правосторонним, противоположна той стороне, относительно которой правосторонним представляется ориентированный угол $\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$. Поэтому

$$[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1] = -[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2].$$

Это соотношение остается в силе и тогда, когда одно из произведений (а с ним неизбежно и второе) обращается в нуль.

В соответствии с этим принято говорить, что векторное произведение является *знакопеременным* (в противоположность коммутативности, которой обладает произведение двух чисел, произведение вектора на число и скалярное произведение двух векторов).

26. Применяя соображения, изложенные в рубр. **23** и **24**, к основным версорам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, мы приходим к следующим основным формулам, которые необходимо хорошо усвоить:

$$\left.\begin{array}{c}[\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}] = [\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}] = [\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}] = 0, \\ [\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i}, \quad [\boldsymbol{k}\boldsymbol{i}] = \boldsymbol{j}, \quad [\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k}.\end{array}\right\} \qquad (17)$$

Наконец, для четкости повторим правило построения векторного произведения. Чтобы получить вектор, приложенный в точке O и представляющий собой произведение $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$ двух векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, отличных от нуля и не параллельных между собою, достаточно центрировать их в точке O; если $\overline{OP_1}$ и $\overline{OP_2}$ суть эти приложенные векторы (см. фиг. 10), то вектор $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$ направлен по прямой OQ, перпендикулярной к плоскости OP_1P_2 в точке O, и обращен в сторону, относительно которой ориентированный угол $P_1\widehat{O}P_2$ является правосторонним; длина этого вектора OQ выражается тем же числом, что и площадь параллелограма OP_1RP_2.

27. **Выражение векторного произведения в компонентах перемножаемых векторов.** Мы намерены здесь найти выражения компонент w_x, w_y, w_z векторного произведения $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$ при помощи компонент X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. При этом мы начинаем с того случая, когда оба вектора $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ отличны от нуля и не коллинеарны; если поэтому мы центрируем эти векторы, то на них можно будет построить действительный параллелограм.

При этих предположениях вектор $\boldsymbol{w}$ должен быть, по определению, перпендикулярен к каждому из векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$; поэтому компоненты w_x, w_y, w_z должны удовлетворять двум условиям:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{w} = X_1w_x + Y_1w_y + Z_1w_z = 0, \\ \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{w} = X_2w_x + Y_2w_y + Z_2w_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Легко убедиться, что в рассматриваемом случае миноры

$$Y_1Z_2 - Z_1Y_2, \quad Z_1X_2 - X_1Z_2, \quad X_1Y_2 - Y_1X_2 \tag{19}$$

матрицы

$$\begin{Vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{Vmatrix} \tag{19a}$$

не могут совместно обратиться в нуль. В самом деле, имея в виду определение скалярного произведения векторов, можно написать сумму их квадратов [1]) в виде:

$$\begin{vmatrix} v_1^2 & v_1v_2\cos\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2} \\ v_1v_2\cos\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2} & v_2^2 \end{vmatrix} = v_1^2v_2^2\,(1-\cos^2\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}) = v_1^2v_2^2\sin^2\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2};$$

при сделанных предположениях произведение $v_1v_2\sin\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$ (площадь параллелограма, построенного на векторах $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$), наверное, имеет положительное значение.

Таким образом в силу уравнений (18) компоненты w_x, w_y, w_z пропорциональны минорам (19) матрицы (19a); если поэтому обозначим через ρ коэфициент пропорциональности, то

$$w_x = \rho\,(Y_1Z_2 - Z_1Y_2), \quad w_y = \rho\,(Z_1X_2 - X_1Z_2), \quad w_z = \rho\,(X_1Y_2 - X_2Y_1).$$

Отсюда следует, что квадрат длины вектора $\boldsymbol{w}$ выражается формулой:

$$w^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = \rho^2v_1^2v_2^2\sin^2\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2};$$

а так как это выражение должно быть тождественно с произведением $v_1^2v_2^2\sin\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$, то отсюда заключаем, что $\rho^2 = 1$, т. е.

$$\rho = \pm 1.$$

Чтобы установить, какой из двух знаков действительно имеет место, заметим следующее. Если мы будем непрерывно изменять векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, то значение ρ не может измениться, пока вектор $\boldsymbol{w}$ не пройдет через нуль; другими словами, ρ сохранит свое значение, как бы ни изменялись непрерывно векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, лишь бы они не становились параллельными и не обращались

---

[1]) Следует припомнить тождество, к которому приходим, возведя матрицу (19a) в квадрат:

$$\begin{vmatrix} Y_1 Z_1 \\ Y_2 Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1 X_1 \\ Z_2 X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 Y_1 \\ X_2 Y_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 & X_2X_1 + Y_2Y_1 + Z_2Z_1 \\ X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 & X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 \end{vmatrix}.$$

В справедливости этого тождества можно, конечно, убедиться и непосредственно.

в нуль. Между тем, такой непрерывной деформацией в пространстве всегда можно превратить одну пару векторов, удовлетворяющую этим условиям, в любую другую[1]). Следовательно, ρ постоянно имеет один и тот же знак, и, чтобы его установить, достаточно рассмотреть один частный случай.

Если, положим, $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{j}$, то матрица (19a) примет вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix};$$

если теперь припомним, что $[\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k}$ и что компоненты вектора $\boldsymbol{k}$ имеют значения 0, 0, 1, то убедимся, что ρ равно 1; вместе с тем мы приходим к заключению, что компоненты векторного произведения $\boldsymbol{w}$ всегда выражаются формулами:

$$w_x = Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, \quad w_y = Z_1 X_2 - X_1 Z_2, \quad w_z = X_1 Y_2 - Y_1 X_2. \quad (20)$$

Вводя основные версоры, можно написать:

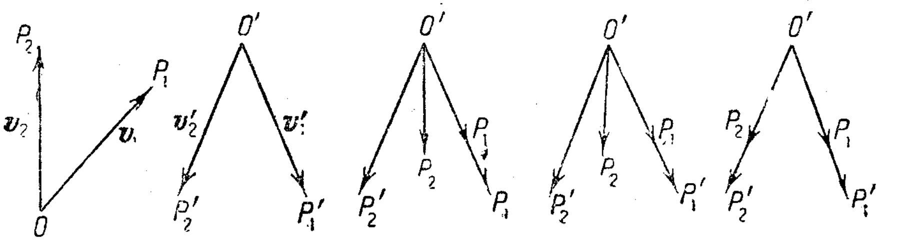
$$[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2] = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2)\,\boldsymbol{i} + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2)\,\boldsymbol{j} + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2)\,\boldsymbol{k}$$

или в форме определителя

$$[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \quad (21)$$

К этому заключению мы пришли, вовсе исключив из рассмотрения два случая: когда каждый из векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ обращается в нуль и когда они друг другу параллельны. Но соотношения (20), а следовательно, и (21) остаются в силе также и для этих двух исключительных случаев, ибо как в одном, так и в другом из них обе части равенств (20) и (21) обращаются в нуль.

[1]) Так, чтобы привести к такому совмещению пары $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$, изображенные на (фиг. 13a), перемещаем угол P_1OP_2 так, чтобы сторона OP_1 совпала с $O'P_1'$ (фиг. 13b); вектор $\overline{OP_2}$ займет при этом некоторое положение $\overline{O'P_2}$.



13a. 13b. 13c. 13d.

Фиг. 13.

Вращая угол $P_2O'P_1$ в ту или в другую сторону вокруг $O'P_1$, приведем вектор $O'P_2$ в полуплоскость $P_1'O'P_2'$ (фиг. 13c), затем, изменяя угол, приведем вектор $O'P_2$ к совмещению с прямой $O'P_2'$ (фиг. 13d). Наконец, изменяя длины векторов и $O'P_1$ и $O'P_2$, достигнем полного совпадения. (*Ред.*)

28. Из выражений (20) и (21) векторного произведения в компонентах мы вновь убеждаемся в знакопеременном характере этого произведения (рубр. 25): так как определитель (21) изменит знак на обратный, если мы в нем переставим две последние горизонтали, то

$$[\boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_1] = -[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2].$$

На основе формул (20) или (21) легко устанавливаются следующие два тождества, в первом из которых a есть произвольное вещественное число:

$$a[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2] = [a\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{v}_1\, a\boldsymbol{v}_2];$$

$$[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)] = [\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}]_1 + [\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2].$$

Первое из этих тождеств доказывается настолько просто, что на нем не стоит останавливаться. Для доказательства второго обозначим компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ через X, Y, Z; тогда по формуле (21):

$$[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix}; \quad [\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X & Y & Z \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X & Y & Z \\ X_1 + X_2 & Y_1 + Y_2 & Z_1 + Z_2 \end{vmatrix}.$$

Ясно, что последний определитель равен сумме двух первых.

Последнее тождество выражает свойство *дистрибутивности* или *распределительности* векторного произведения; как и в алгебре, оно распространяется на случай, когда сумма векторов содержит не два, а какое угодно число слагаемых. Отсюда и из правила умножения вектора на число (рубр. 15) вытекает, что произведение многочленов, составленных из векторных слагаемых, может быть развернуто, как произведение алгебраических полиномов. Иначе говоря, произведение

$$\left[\sum_1^n {}_r a_r \boldsymbol{v}_r \sum_1^p {}_s b_s \boldsymbol{w}_s\right]$$

(где n и p суть целые числа, a_r и b_s — вещественные числа, $\boldsymbol{v}_r$ и $\boldsymbol{w}_s$ — произвольные векторы) развертывается, как обыкновенно в алгебре, с тем только ограничением, что в общем члене разложения $[a_r \boldsymbol{v}_r, b_s \boldsymbol{w}_s]$ нельзя переставлять векторных сомножителей; однако коэфициенты a_r и b_s можно переставлять как угодно, в частности, общему члену можно придать форму: $a_r b_s [\boldsymbol{v}_r \boldsymbol{w}_s]$.

29. Смешанные произведения. Даны три вектора $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$; составим векторные произведения:

$$[\boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_3], \quad [\boldsymbol{v}_3 \boldsymbol{v}_1], \quad [\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$$

и затем каждое из них помножим скалярно на недостающий третий вектор.

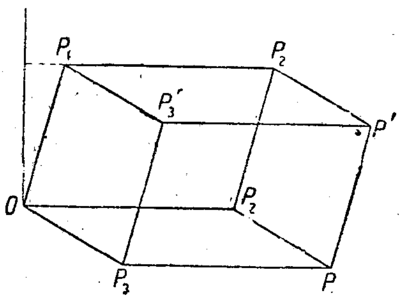
Получающиеся, таким образом, *смешанные произведения равны между собой*, т. е. имеют место тождества:

$$\boldsymbol{v}_1[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3] = \boldsymbol{v}_2[\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_1] = \boldsymbol{v}_3[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2] \tag{22}$$

Чтобы это установить наиболее простым способом, отнесем данные три вектора к ортогональному триэдру и обозначим через X_i, Y_i, Z_i $(i=1, 2, 3)$ компоненты вектора $\boldsymbol{v}_i$ по осям триэдра. Легко усмотреть, что наши три смешанные произведения в силу соотношений (20) и (15) выразятся определителями:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \tag{23}$$

Отметим, что абсолютное значение каждого из этих трех определителей выражает объем параллелепипеда, построенного на трех векторах $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ ($OP_2PP_3, P_1P_2'P'P_3'$ на фиг. 14). Чтобы это доказать, исключим, прежде всего, случай вырождения, когда на трех векторах нельзя построить действительного параллелепипеда, и обозначим через $\boldsymbol{v}$ произведение $[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3]$. Тогда длина вектора $\boldsymbol{v}$ выразит площадь параллелограма векторов $\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{v}_3$ (т. е. основания OP_2PP_3 нашего параллелепипеда); направление же его перпендикулярно к плоскости этого параллелограма. Скалярное произведение можно поэтому интерпретировать (рубр. 20), как произведение из $\boldsymbol{v}$ на компоненту вектора $\boldsymbol{v}_1$ по направлению $\boldsymbol{v}$, надлежащим образом ориентированному; а так как вектор $\boldsymbol{v}$ ($\overline{OQ}$) перпендикулярен к плоскости $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ (OP_2PP_3), то длина этой компоненты (OR) есть не что иное, как высота h параллелепипеда, соответствующая основанию, площадь которого выражается числом v. Таким образом абсолютное значение произведения $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}$, т. е. смешанного произведения $\boldsymbol{v}_1[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3]$, равно vh (произведение из основания параллелепипеда на высоту) и выражает объем параллелепипеда векторов $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$. Знак же произведения $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1$ есть $+$ или $-$, смотря по тому, образует ли $\boldsymbol{v}_1$ острый или тупой угол с вектором $\boldsymbol{v}$, т. е. с перпендикуляром к плоскости $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, ориентированным таким образом, чтобы вращение $\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$ было относительно него правосторонним; еще иначе, произведение $\boldsymbol{v}_1[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3]$ имеет положительное значение, когда векторы $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ образуют правосторонний триэдр, и отрицательное в противоположном случае.



Фиг. 14.

Случаи вырождения, провизорно оставленные в стороне, получаются из соображений непрерывности, если представим себе, что три вектора стремятся стать параллельными одной и той же плоскости или что один из них стремится к нулю.

Объем соответствующего параллелепипеда всегда имеет пределом нуль, а потому в предельном случае

$$v_1 [v_2 v_3] = 0 . \qquad (24)$$

Отсюда следует вывод: *обращение в нуль смешанного произведения $v_1 [v_2 v_3]$, составленного из трех не нулевых векторов, представляет собою условие, необходимое и достаточное для того, чтобы векторы были компланарны.*

30. Условия коллинеарности двух векторов. Выражения компонент векторного произведения и численного значения смешанного произведения дают возможность выразить в координатах условия коллинеарности и компланарности векторов; этим условиям можно придать и векторную форму.

Как мы уже знаем (рубр. 22), условие коллинеарности двух векторов v_1 и v_2 сводится к тому, что векторное их произведение должно обращаться в нуль:

$$[v_1 v_2] = 0 . \qquad (25)$$

В координатах (при прежних их обозначениях) это условие выражается тремя равенствами:

$$Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 = 0 , \quad Z_1 X_2 - X_1 Z_2 = 0 , \quad X_1 Y_2 - Y_1 X_2 = 0. \qquad (25a)$$

Одно из этих трех уравнений представляет собою следствие остальных. Если исключим совершенно тривиальный случай, когда оба вектора v_1 и v_2 равны нулю, т. е. будем считать один из них, скажем, v_2, во всяком случае отличным от нуля, то, по крайней мере одна из координат X_2, Y_2, Z_2 отлична от нуля; пусть $Z_2 \neq 0$. Если положим $\frac{Z_1}{Z_2} = a$, т. е. $Z_1 = aZ_2$, то соотношения (25a) дадут: $X_1 = aX_2$, $Y_1 = aY_2$. Условие коллинеарности векторов v_1 и v_2 может быть, таким образом, выражено равенствами:

$$X_1 = aX_2, \quad Y_1 = aY_2, \quad Z_1 = aZ_2 , \qquad (25b)$$

где a есть вещественное число. Эти равенства, в свою очередь, влекут за собой соотношения (25a). При $a = 0$ они охватывают и тот случай, когда v_1 есть нулевой вектор и может поэтому считаться коллинеарным с любым другим вектором.

Равенство (25b) можно объединить в векторное соотношение:

$$v_1 = a v_2 , \qquad (25c)$$

которое, как мы уже знаем (рубр. 17), имеет место в том и только в том случае, когда векторы v_1 и v_2 коллинеарны.

Итак, *чтобы векторы v_1 и v_2 были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение* (25c). *Это векторное равенство может быть заменено тремя скалярными равенствами* (25b). Из соотношений (25c) и (25b) можно исключить множитель a, и тогда *условия коллинеарности выразятся либо тремя скалярными равенствами* (25a), *либо одним векторным равенством* (25).

31. Условия компланарности трех векторов $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, как мы видели (рубр. 29), выражается равенством (24):

$$\boldsymbol{v}_1[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3]=0 \tag{24}$$

или в координатах

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0. \tag{24a}$$

Оставляя и здесь в стороне совершенно тривиальный случай, когда все три вектора коллинеарны, будем считать, что векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ не коллинеарны. Тогда равенства (25а) не могут быть совместно справедливы, т. е. из трех разностей

$$Y_1Z_2-Y_2Z_1, \quad Z_1X_2-Z_2X_1, \quad X_1Y_2-X_2Y_1,$$

по крайней мере, одна отлична от нуля.

Положим, что отлична от нуля третья разность. Мы можем ее рассматривать как минор e_3 элемента Z_3 в определителе (24а); если через e_1 и e_2 обозначим миноры элементов Z_1, Z_2 того же определителя и примем во внимание, что определитель этот равен нулю, то придем к трем равенствам:

$$\begin{aligned} e_1X_1+e_2X_2+e_3X_3&=0, \\ e_1Y_1+e_2Y_2+e_3Y_3&=0, \\ e_1Z_1+e_2Z_2+e_3Z_3&=0. \end{aligned} \tag{24b}$$

Они выражают, что векторы $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ связаны линейным соотношением:

$$e_1\boldsymbol{v}_1+e_2\boldsymbol{v}_2+e_3\boldsymbol{v}_3=0, \tag{24c}$$

в котором, по крайней мере, один из коэфициентов e_1, e_2, e_3 отличен от нуля. Обратно, если имеет место векторное равенство (24с), то оно разрешается в три скалярные равенства (24b), исключая из которых коэфициенты e_1, e_2, e_3, получаем соотношение (24а) или — в векторной форме — (24). Заметим, что соотношение (24с) можно представить также в виде:

$$\boldsymbol{v}_3=d_1\boldsymbol{v}_1+d_2\boldsymbol{v}_2, \quad \text{где} \quad d_1=-\frac{e_1}{e_3}, \quad d_2=-\frac{e_2}{e_3}. \tag{24d}$$

Итак, *чтобы три вектора $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них выражался линейно через оба других* (24) или, *в более симметричной форме, чтобы они были связаны линейной зависимостью* (24с), *в которой, по крайней мере, один из коэфициентов e_1, e_2, e_3 отличен от нуля.* В скалярной форме эта зависимость выражается тремя равенствами (24b), исключая из которых коэфициенты e_1, e_2, e_3, *мы получим условие компланарности векторов $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ в форме* (24а) *или* (24).

32. Двойное векторное произведение. Если векторное произведение $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$ помножим векторно же на третий вектор $\boldsymbol{v}$, то получим так называемое двойное векторное произведение:

$$\boldsymbol{u}=\big[\boldsymbol{v}\,[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]\big].$$

Если через $\boldsymbol{w}$ обозначим произведение $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$, то вектор $\boldsymbol{w}$ перпендикулярен к плоскости $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$. Вектор $\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]$, в свою очередь, перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{w}$; поэтому он лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$, вернее, компланарен с ними. Следовательно (рубр. 31):

$$\boldsymbol{u} = d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 .$$

Основываясь на формулах (20), можно вычислить коэффициенты d_1 и d_2. С этой целью заметим, что компоненты w_x, w_y, w_z вектора $\boldsymbol{w}$ даются формулами (20) непосредственно; а чтобы получить компоненты u_x, u_y, u_z вектора $\boldsymbol{u}$, нужно в формулах (20) вместо X_1, Y_1, Z_1 подставить компоненты X, Y, Z вектора $\boldsymbol{v}$, а вместо X_2, Y_2, Z_2 компоненты w_x, w_y, w_z вектора $\boldsymbol{w}$. Следовательно:

$$u_x = Yw_z - Zw_y = Y(X_1Y_2 - Y_1X_2) - Z(Z_1X_2 - X_1Z_2) =$$
$$= X_1(YY_2 + ZZ_2) - X_2(YY_1 + ZZ_1).$$

Прибавляя в последней части этого равенства к уменьшаемому и вычитаемому по XX_1X_2, получим:

$$u_x = (XX_2 + YY_2 + ZZ_2)X_1 - (XX_1 + YY_1 + ZZ_1)X_2 =$$
$$= (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2)X_1 - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1)X_2.$$

Таким же образом найдем, что

$$u_y = (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2)Y_1 - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1)Y_2, \quad u_z = (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2)Z_1 - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1)Z_2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{v}[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]] = (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_2 . \tag{26}$$

Иными словами,

$$d_1 = \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2 ,$$
$$d_2 = -\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1.$$

Формула *разложения двойного векторного произведения* (26) находит очень часто применение в приложениях векторного исчисления. Из этой формулы вытекает, между прочим, что свойством сочетательности векторное произведение не обладает, т. е. двойные произведения $[\boldsymbol{v}[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]]$ и $[[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1]\boldsymbol{v}_2]$, вообще, не равны. В самом деле, первое из этих двойных произведений выражается формулой (26) непосредственно, а для второго та же формула (26) дает:

$$\boldsymbol{u}' = [[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1]\boldsymbol{v}_2] = -[\boldsymbol{v}_2[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1]] = [\boldsymbol{v}_2[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}]] = (\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v} .$$

Если бы $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$, то имело бы поэтому место равенство:

$$(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v} .$$

Это значит, что равенство $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$, требуемое свойством сочетательности, имеет место только в том исключительном случае, когда векторы $\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{v}$ коллинеарны и притом имеют совершенно определенное отношение длин.