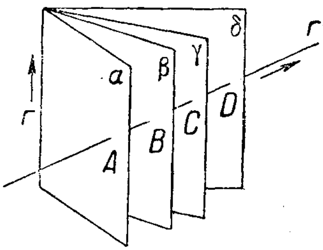
4. Момент приложенного вектора относительно точки или оси.

33. Учению о *моменте* вектора предпошлем некоторые соображения качественного свойства относительно стороны обращения двух ориентированных прямых r и r', не принадлежащих одной плоскости.

Если через одну из этих прямых, скажем, через r, проведем плоскости, проходящие через точки A, B, C, D,... другой прямой r', следующие одна за другой в сторону ориентации последней, то образуется пучок плоскостей (фиг. 15), и сторона обращения луча r' определяет сторону обращения пучка. Относительно оси r (т. е. относительно наблюдателя, стоящего на оси r так, что сторона обращения от ног к голове совпадает со стороной обращения оси r) последовательность проекций пучка (или, если угодно, соответствующее вращение) будет представляться правосторонней или левосторонней. Но легко видеть, что вращение вокруг оси r, определяемое осью r', будет того же типа (правостороннее или левостороннее), что и вращение вокруг оси r', определяемое осью r.



Фиг. 15.

Две ориентированные прямые r и r', не лежащие в одной плоскости, имеют друг относительно друга правостороннее или левостороннее расположение, смотря по тому, определяют ли они одна вокруг другой правостороннее или левостороннее вращение (в установленном смысле слова).

Определение правостороннего и левостороннего расположения непосредственно распространяется и на два приложенных некомпланарных вектора $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$, а также на смешанную пару (ориентированная прямая и приложенный вектор, не лежащие в одной плоскости) в том смысле, что тот же критерий применяется в этом случае к ориентированным по стороне обращения вектора прямым их действия (рубр. 3).

34. Если дан приложенный вектор $\overline{AB}=v$ и точка P (фиг. 16), то векторное произведение

$$M=[\overline{PA},\ \overline{AB}]=[\overline{PA}\ v]^{1)}$$

называется *моментом приложенного вектора $v=\overline{AB}$ относительно точки или полюса P.*

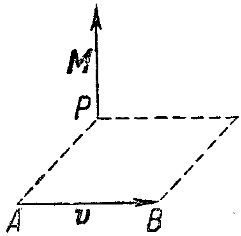
Очень важно точно фиксировать геометрический смысл этого определения: если мы будем иметь в виду общий случай, когда вектор $\overline{AB}$ отличен от нуля и не расположен с полюсом P на одной прямой (так что векторы $\overline{PA}$ и v не коллинеарны), то момент M, будучи приложен в полюсе P, перпендикулярен к пло-

---

[1]) Т. е. векторное произведение радиуса-вектора точки приложения A относительно полюса P на вектор v. (*Ред.*)

скости PAB и имеет относительно $\overline{AB}$ правостороннее расположение; длина же его численно равна площади параллелограма, построенного на отрезках PA и AB, или, иначе говоря, равна произведению длины v приложенного вектора на расстояние полюса P от прямой действия этого вектора.

В случаях, которые мы исключили, когда $\boldsymbol{v}=0$ или когда линия действия вектора $\boldsymbol{u}$ проходит через полюс, совершенно ясно, что момент $\boldsymbol{M}$ обращается в нуль (рубр. 21).



Фиг. 16.

Если отнесем вектор $\boldsymbol{v}$ и точки P и A к триэдру ортогональных декартовых координат и обозначим компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ через X, Y, Z, координаты точки A — через x, y, z, а координаты точки P — через a, b, c, то компоненты радиуса-вектора $\overline{PA}$ будут $x-a$, $y-b$, $z-c$; компоненты же момента $\boldsymbol{M}$ по формулам (20) будут иметь значения:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= (y-b)Z-(z-c)Y, \\ M_y &= (z-c)X-(x-a)Z, \\ M_z &= (x-a)Y-(y-b)X. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

35. Перейдем к определению *осевого* момента, т. е. отнесенного не к точке, а к ориентированной прямой r общего расположения. Для этого важно установить следующее предложение. *Компонента по направлению r момента приложенного вектора относительно любой точки P той же прямой r не зависит от положения точки на этой прямой.* Чтобы это доказать, достаточно принять прямую r за ось z; тогда координаты точки P будут 0, 0, c. Последняя из формул (27) примет вид:

$$M_z = xY - yX$$

и покажет, что компонента M_z не зависит от c, т. е. не зависит от положения точки P на оси (по прямой r).

Этим оправдывается следующее определение: *под моментом M_r вектора, приложенного в точке A, относительно ориентированной прямой r* разумеют компоненту по направлению r момента вектора $\boldsymbol{v}$ относительно любой точки этой прямой.

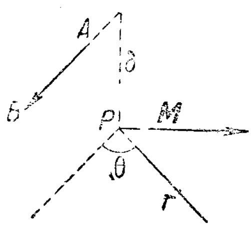
Для противоположения *осевому* моменту принято называть момент вектора относительно точки или полюса *полярным* [1]).

36. Если $\boldsymbol{u}$ есть единичный вектор, имеющий направление в сторону обращения ориентированной прямой r, то осевой момент M_r можно представить (рубр. 20) в векториальной форме смешанным произведением:

$$M_r = \boldsymbol{u}[\overline{PA},\ \overline{AB}] = \boldsymbol{u}[\overline{PA}\,\boldsymbol{v}];$$

[1]) Важно отчетливо себе уяснить, что полярный момент вектора есть вектор, а осевой момент есть скаляр. (*Ред.*)

отсюда следует (рубр. 29), что M_r имеет положительное или отрицательное значение в зависимости от того, образуют ли три вектора u, $\overline{PA}$ и v правосторонний или левосторонний триэдр, т. е. имеет ли вектор v относительно ориентированной оси r правостороннее или левостороннее расположение; абсолютное же значение числа M_r равно объему параллелепипеда, построенного на векторах u, $\overline{PA}$ и v; поэтому M_r обращается в нуль (помимо тривиальных случаев $v=0$ или $\overline{PA}=0$) только в том случае, когда векторы u, $\overline{PA}$ и $\overline{AB}$ компланарны, т. е. когда прямая действия вектора v, приложенного в точке A, компланарна с осью r (т. е. с прямой действия вектора u, приложенного в точке P). Если исключить эти случаи, когда M_r обращается в нуль, можно получить для него весьма простое выражение следующим образом.



Фиг. 17.

Построим общий перпендикуляр к прямым AB и r (фиг. 17); длина δ отрезка этого перпендикуляра, проходящего между прямыми, выражает кратчайшее расстояние между ними. Основание P этого перпендикуляра на прямой r примем за полюс. Тогда длина полярного момента M вектора v относительно точки P выражается произведением $v\delta$. Если теперь обозначим через θ наименьший угол неориентированных прямых r и AB, то наименьший угол между r и прямой действия (тоже не ориентированной) вектора M есть дополнение угла θ; поэтому абсолютное значение момента M_r дается выражением $v\delta \sin\theta$; в связи с тем, что было сказано выше, мы отсюда заключаем, что

$$M_r = \pm v\delta \sin\theta \tag{28}$$

с верхним или нижним знаком, смотря по тому, имеет ли приложенный вектор v правостороннее или левостороннее расположение относительно ориентированной прямой r.

5. Результирующий или главный момент системы приложенных векторов.

37. Дана система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$, приложенных в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (различных или совпадающих); моменты этих векторов относительно общего полюса P обозначим соответственно через $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Результирующим или главным моментом этой системы относительно точки P называют вектор M, представляющий сумму моментов отдельных векторов:

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum_1^n {}_i M_i. \tag{29}$$