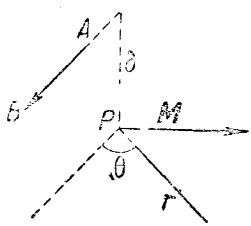
отсюда следует (рубр. 29), что M_r имеет положительное или отрицательное значение в зависимости от того, образуют ли три вектора u, $\overline{PA}$ и v правосторонний или левосторонний триэдр, т. е. имеет ли вектор v относительно ориентированной оси r правостороннее или левостороннее расположение; абсолютное же значение числа M_r равно объему параллелепипеда, построенного на векторах u, $\overline{PA}$ и v; поэтому M_r обращается в нуль (помимо тривиальных случаев $v=0$ или $\overline{PA}=0$) только в том случае, когда векторы u, $\overline{PA}$ и $\overline{AB}$ компланарны, т. е. когда прямая действия вектора v, приложенного в точке A, компланарна с осью r (т. е. с прямой действия вектора u, приложенного в точке P). Если исключить эти случаи, когда M_r обращается в нуль, можно получить для него весьма простое выражение следующим образом.



Фиг. 17.

Построим общий перпендикуляр к прямым AB и r (фиг. 17); длина δ отрезка этого перпендикуляра, проходящего между прямыми, выражает кратчайшее расстояние между ними. Основание P этого перпендикуляра на прямой r примем за полюс. Тогда длина полярного момента M вектора v относительно точки P выражается произведением $v\delta$. Если теперь обозначим через θ наименьший угол неориентированных прямых r и AB, то наименьший угол между r и прямой действия (тоже не ориентированной) вектора M есть дополнение угла θ; поэтому абсолютное значение момента M_r дается выражением $v\delta \sin\theta$; в связи с тем, что было сказано выше, мы отсюда заключаем, что

$$M_r = \pm v\delta \sin\theta \tag{28}$$

с верхним или нижним знаком, смотря по тому, имеет ли приложенный вектор v правостороннее или левостороннее расположение относительно ориентированной прямой r.

5. Результирующий или главный момент системы приложенных векторов.

37. Дана система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$, приложенных в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (различных или совпадающих); моменты этих векторов относительно общего полюса P обозначим соответственно через $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Результирующим или главным моментом этой системы относительно точки P называют вектор M, представляющий сумму моментов отдельных векторов:

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum_1^n {}_i M_i. \tag{29}$$

Точка P, относительно которой взяты все моменты M_i, называется *полюсом* или *центром приведения* системы векторов. Отметим следующую теорему:

Если все векторы системы приложены в общей точке A, то главный момент системы всегда совпадает с моментом суммы всех данных векторов, приложенной в точке A (теорема Вариньона)[1].

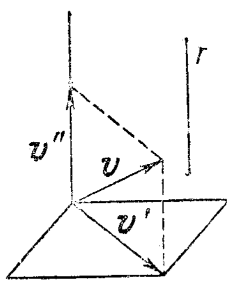
В самом деле, если обозначим через R сумму всех векторов v_i, то в силу определения полярного момента, с одной стороны, и по свойству дистрибутивности векторного произведения, с другой стороны, каков бы ни был центр приведения P,

$$M = \sum_{1}^{n}{}_i M_i = \sum_{1}^{n}{}_i [\overline{PA} v_i] \left[\overline{PA} \sum v_i\right] = [\overline{PA}\, R].$$

38. Рассмотрим снова систему приложенных векторов общего положения (A_1, v_1), (A_2, v_2), $(A_3, v_3), \ldots, (A_n, v_n)$; пусть r будет произвольная ориентированная прямая.

Припомним (рубр. 13), что сумма нескольких векторов имеет компонентой (по отношению к любой ориентированной оси) сумму компонент слагаемых векторов. Вследствие этого из предыдущей рубрики непосредственно вытекает, что компонента по направлению r главного момента системы по отношению к любой точке P прямой r равна сумме моментов по отношению к оси r всех векторов системы.

В связи с этим нужно считать оправданным следующее определение: *результирующим или главным моментом системы приложенных векторов относительно ориентированной прямой r* называется алгебраическая сумма моментов относительно этой оси всех векторов системы, или, что то же, компонента относительно r главного момента системы, взятого по отношению к любой точке прямой r.



Фиг. 18.

Если все векторы приложены в одной и той же точке A, то главный момент системы относительно любого полюса совпадает с моментом главного вектора относительно того же полюса; точно так же, главный момент системы относительно любой оси равен моменту главного вектора относительно той же оси.

В частности, если представим себе приложенный вектор v (фиг. 18) разложенным на две слагающие v' и v'' — одну, перпендикулярную к прямой r, и другую, параллельную ей, и имеющие с v общее начало, то момент вектора v относительно r совпадает с главным моментом системы, образованной приложенными векторами v' и v''. Но так как момент вектора v'' равен нулю (рубр. 36), то мы отсюда заключаем, что момент относительно

[1] П. Вариньон (Pierre Varignon) родился в Кано в 1654 г., умер в Париже в 1722 г. Приведенная в тексте теорема содержится в его посмертном труде „Nouvelle mécanique ou statique", Paris 1725.

оси r приложенного вектора $\boldsymbol{v}$ совпадает с моментом (конечно, относительно той же оси) его перпендикулярной к r слагающей $\boldsymbol{v}'$.

39. Изменение момента с переменой центра приведения. Пусть M и M' будут моменты одного и того же приложенного вектора $\boldsymbol{u} = \overline{AB}$ относительно двух различных полюсов P и P'.

По определению имеем:

$$\boldsymbol{M} = [\overline{PA}\boldsymbol{v}], \; \boldsymbol{M}' = [\overline{P'A}\boldsymbol{v}];$$

но так как

$$\overline{P'A} = \overline{PA} + \overline{P'P},$$

то

$$M' = [\overline{PA}\boldsymbol{v}] + [\overline{P'P}\boldsymbol{v}],$$

т. е.

$$M' = M + [\overline{P'P}\boldsymbol{v}].$$

Далее, пусть дана система приложенных векторов $(A_i, \boldsymbol{v}_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$; положим

$$\sum_1^n{}_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{R}.$$

Если M_i и M_i' суть моменты вектора $\boldsymbol{v}_i$ относительно двух центров приведения P и P', а M и M' — главные моменты системы относительно тех же центров приведения, то

$$\overline{M_i'} = M_i + [\overline{P'P}\boldsymbol{v}_i]; \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Суммируя эти равенства, мы получаем, как и в случае одного вектора, формулу:

$$M' = M + [\overline{P'P'}\boldsymbol{R}]. \tag{30}$$

Она, очевидно, допускает следующее толкование: *главный момент системы относительно точки P' представляет собою сумму аналогичного момента системы относительно точки P и момента относительно точки P' главного вектора $\boldsymbol{R}$, приложенного в точке P.*

Пусть, в частности, точка P' совпадает с началом O осей координат и пусть M_0 будет соответствующий главный момент.

Обозначим через M_x, M_y, M_z компоненты главного момента M, через $M_{o/x}$, $M_{o/y}$, $M_{o/z}$ — компоненты главного момента M_o, через x, y, z — координаты произвольно выбранного полюса P (вместо a, b, c в рубр. 34) и, наконец, через X, Y, Z — компоненты главного вектора $\boldsymbol{R}$.

Тогда из соотношений (30) и (20) легко получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_{o/x} - yZ + zY, \\ M_y &= M_{o/y} - zX + xZ, \\ M_z &= M_{o/z} - xY + yX. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Из соотношения (30) сверх того вытекает: 1) при $\boldsymbol{R}=0$, $M'=M$; 2) чтобы момент M' совпадал с M, каков бы ни был полюс P', необходимо, чтобы $[\overline{P'P'}\boldsymbol{R}]=0$, каков бы ни был полюс P; а это влечет за собой (рубр. 21):

$$\boldsymbol{R}=0.$$

Отсюда вытекает, что для системы векторов, сумма которых равна нулю, главный момент не зависит от центра приведения. Если главный вектор системы $\boldsymbol{R}$ (сумма векторов системы) отличен от нуля, то $M'=M$ в том, и только в том случае, когда прямая $P'P$ параллельна вектору $\boldsymbol{R}$ (т. е. когда $[\overline{P'P}\boldsymbol{R}]=0$).

40. Инвариантный трехчлен. Из соотношения (30) и из дистрибутивности скалярного произведения вытекает тождество:

$$M'\boldsymbol{R}=M\boldsymbol{R}+[\overline{P'P}\boldsymbol{R}]\,\boldsymbol{R}.$$

Но, по определению векторного произведения вектор $[\overline{P'P}\boldsymbol{R}]$ перпендикулярен к $\boldsymbol{R}$, а потому

$$[\overline{P'P}\boldsymbol{R}]\,\boldsymbol{R}=0\ ^{1)},$$

а следовательно:

$$M'\boldsymbol{R}=M\boldsymbol{R}.$$

Отсюда следует, что *скалярное произведение*

$$M\boldsymbol{R}=M_xX+M_yY+M_zZ$$

главного момента системы на ее главный вектор не зависит от центра приведения. Вследствие этого трехчлен $M_xX+M_yY+M_zZ$ называют *инвариантным трехчленом.* Мы будем обозначать его для краткости буквой T.

41. Если главный вектор системы отличен от нуля и, следовательно, имеет вполне определенное направление, то компонента главного момента по направлению результирующего вектора не зависит от центра приведения. В самом деле, как бы ни был выбран центр приведения, из соотношения (15) рубр. **20** следует, что

$$M\cos\widehat{\boldsymbol{R}M}=\frac{T}{R}, \tag{32}$$

чем утверждение и доказывается.

Отметим еще, что как из соотношения (32), так и из общих свойств скалярного произведения (рубр. **20**) вытекает, что в зависимости от того, будет ли $T>0$ или $T<0$, угол между главным вектором системы $\boldsymbol{R}$ и ее главным моментом M будет всегда острым либо всегда тупым, как бы ни был выбран центр приведения.

---

[1]) Вообще если вектор $\boldsymbol{v}$ коллинеарен с одним из векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, то смешанное произведение $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]\,\boldsymbol{v}$ обращается в нуль, ибо векторы $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ в этом случае компланарны (см. рубр. **29** и **31**). (*Ред.*)

Если, наконец, $T=0$, а R, как выше, предполагается отличным от нуля, то главный момент системы всегда остается перпендикулярным к ее главному вектору или же обращается в нуль, как это в частных случаях может иметь место.

42. Центральная ось. Наименьший момент. Дана система векторов, главный вектор которой отличен от нуля; разыщем геометрическое место точек $P(x, y, z)$, по отношению к которым главный момент системы параллелен ее главному вектору R или, в частности, равен нулю. Задачу эту можно было бы решить геометрически, основываясь на соотношении (30). Но гораздо проще это сделать, пользуясь аналитическим ее выражением. Выберем надлежащим образом оси координат, именно, возьмем ось Oz параллельной главному вектору R и обращенной в ту же сторону; тогда компоненты X и Y результирующего вектора обратятся в нуль, а компонента Z совпадет с длиной R главного вектора, которая, по условию, больше нуля. В соответствии с этим формулы (39) примут вид:

$$M_x = M_{o|x} - yR, \quad M_y = M_{o|y} + xR, \quad M_z = M_{o'z}.$$

С другой стороны, для точек искомого геометрического места компоненты M_x и M_y должны обращаться в нуль; это приводит к уравнениям:

$$M_{o|x} - yR = 0,$$
$$M_{o|y} + xR = 0,$$

которые дают для x и y постоянные значения:

$$x = -\frac{M_{o'y}}{R}, \quad y = \frac{M_{o'x}}{R}.$$

Требуемое геометрическое место представляет собою прямую, параллельную оси z, т. е. главному вектору R; эта прямая называется *центральной осью* системы.

43. Припомним теперь, что компонента главного момента по ориентированному направлению главного вектора не зависит от центра приведения (рубр. **41**). Отсюда ясно, что длина главного момента принимает наименьшее свое значение, когда момент становится параллельным главному вектору, т. е. когда центр приведения лежит на центральной оси. Эта наименьшая длина, называемая *наименьшим моментом*, совпадает с (постоянным) абсолютным значением момента по направлению главного вектора; вследствие соотношения (32) она имеет значение

$$\frac{|T|}{R}.$$

Поэтому, если инвариантный трехчлен обращается в нуль, то равен нулю и главный момент системы относительно точек центральной оси.

44. Мы до сих пор предполагали, что главный вектор системы отличен от нуля. Если он равен нулю, то главный момент, как нам уже известно, не зависит от центра приведения. В этом случае мы можем принять за центральную ось системы любую прямую, параллельную главному моменту. Мы можем, таким образом, при любой системе векторов говорить о ее центральной оси.

6. Эквивалентные системы векторов и их приведение.

45. Две системы приложенных векторов Σ и Σ' называются *эквивалентными*, если они имеют один и тот же главный вектор и один и тот же главный момент по отношению к какой-либо точке P, а вследствие этого, в силу соотношений (30), и по отношению к любой точке. Таким образом, например, несколько векторов, приложенных к одной и той же точке, образуют в силу теоремы Вариньона (рубр. 38) систему, эквивалентную одному вектору, именно, главному вектору этой системы, приложенному в той же точке. Таким же образом всякие два вектора, расположенные на той же прямой (имеющие общую прямую действия), также эквивалентны.

Из самого определения эквивалентности двух систем непосредственно вытекает, что две системы приложенных векторов, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой. Кроме того, если системы $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ соответственно эквивалентны системам Σ_1', $\Sigma_2', \ldots, \Sigma_n'$, то система Σ, составленная из систем Σ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, эквивалентна системе Σ', составленной из систем Σ_i'.

Если даны две системы приложенных векторов и нужно установить, эквивалентны ли они, то достаточно отнести их к общей системе координат; условия, необходимые и достаточные для эквивалентности систем, выражаются формулами:

$$\begin{gathered} X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z' \\ M_x = M_x', \quad M_y = M_y', \quad M_z = M_z'; \end{gathered} \tag{33}$$

значение букв, конечно, понятно.

46. Из самого определения эквивалентности также совершенно ясно, что система Σ эквивалентна одному вектору в том и только в том случае, если существует такой центр приведения, по отношению к которому главный момент равен нулю, а это, в свою очередь, имеет место в том и только в том случае, если наименьший момент или, что то же, инвариантный трехчлен T равен нулю. Если условие это выполнено и главный вектор системы отличен от нуля, то система эквивалентна главному вектору $\boldsymbol{R}$, приложенному в любой точке центральной оси системы (прямой действия этого вектора).

Если $\boldsymbol{R} = 0$, то главный момент $\boldsymbol{M}$ (рубр. 39) не зависит от центра приведения; если поэтому $M > 0$, то система ни в коем