44. Мы до сих пор предполагали, что главный вектор системы отличен от нуля. Если он равен нулю, то главный момент, как нам уже известно, не зависит от центра приведения. В этом случае мы можем принять за центральную ось системы любую прямую, параллельную главному моменту. Мы можем, таким образом, при любой системе векторов говорить о ее центральной оси.

6. Эквивалентные системы векторов и их приведение.

45. Две системы приложенных векторов Σ и Σ' называются *эквивалентными*, если они имеют один и тот же главный вектор и один и тот же главный момент по отношению к какой-либо точке P, а вследствие этого, в силу соотношений (30), и по отношению к любой точке. Таким образом, например, несколько векторов, приложенных к одной и той же точке, образуют в силу теоремы Вариньона (рубр. 38) систему, эквивалентную одному вектору, именно, главному вектору этой системы, приложенному в той же точке. Таким же образом всякие два вектора, расположенные на той же прямой (имеющие общую прямую действия), также эквивалентны.

Из самого определения эквивалентности двух систем непосредственно вытекает, что две системы приложенных векторов, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой. Кроме того, если системы $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ соответственно эквивалентны системам Σ_1', $\Sigma_2', \ldots, \Sigma_n'$, то система Σ, составленная из систем Σ_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$, эквивалентна системе Σ', составленной из систем Σ_i'.

Если даны две системы приложенных векторов и нужно установить, эквивалентны ли они, то достаточно отнести их к общей системе координат; условия, необходимые и достаточные для эквивалентности систем, выражаются формулами:

$$X=X', \quad Y=Y', \quad Z=Z'$$
$$M_x=M_x', \quad M_y=M_y', \quad M_z=M_z'; \tag{33}$$

значение букв, конечно, понятно.

46. Из самого определения эквивалентности также совершенно ясно, что система Σ эквивалентна одному вектору в том и только в том случае, если существует такой центр приведения, по отношению к которому главный момент равен нулю, а это, в свою очередь, имеет место в том и только в том случае, если наименьший момент или, что то же, инвариантный трехчлен T равен нулю. Если условие это выполнено и главный вектор системы отличен от нуля, то система эквивалентна главному вектору $\boldsymbol{R}$, приложенному в любой точке центральной оси системы (прямой действия этого вектора).

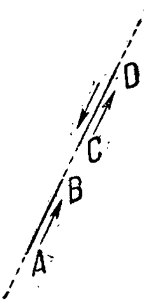
Если $\boldsymbol{R}=0$, то главный момент $\boldsymbol{M}$ (рубр. 39) не зависит от центра приведения; если поэтому $M>0$, то система ни в коем

случае не эквивалентна одному вектору; если же и $M=0$, то система эквивалентна нулевому вектору; в этом последнем случае говорят, что *система эквивалентна нулю*, или, что *она уравновешена*, что она *находится в равновесии*.

Относительно уравновешенной системы нужно иметь в виду, что ее момент относительно любой прямой также равен нулю (рубр. 38).

Важно еще заметить, что две системы эквивалентны, если одна из них получается из другой путем присоединения уравновешенной системы; в самом деле, совершенно ясно, что такое преобразование системы не изменяет ни ее главного вектора, ни главного момента.

Самым простым примером уравновешенной системы служат два вектора, обращенные в противоположные стороны на одной и той же прямой действия, или, как обыкновенно говорят, *прямо противоположные векторы*. Совершенно ясно, что уравновешенная система остается таковой, если к ней присоединить два прямо противоположные вектора.



Фиг. 19.

47. Элементарные операции. По отношению к заданной системе приложенных векторов следующие два приема носят название элементарных операций.

1) *Сложение или разложение векторов, приложенных к одной и той же точке* (т. е. замена какого угодно числа векторов системы, приложенных в одной и той же точке P, их суммой, приложенной в той же точке P; или обратно — замена какого угодно вектора, приложенного в некоторой точке P, несколькими другими, приложенными в той же точке и имеющими этот вектор своею суммой).

2) *Присоединение или устранение двух прямо противоположных векторов.*

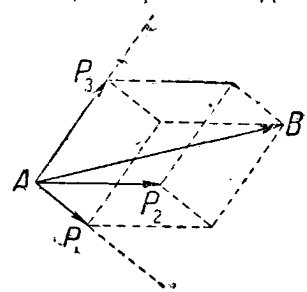
К числу элементарных операций можно еще отнести *перенесение вектора вдоль линии его действия*, т. е. замену какого угодно приложенного вектора $\overline{AB}$ (фиг. 19) равным ему вектором $\overline{CD}$, расположенным на той же прямой. В самом деле, эта последняя операция сводится к последовательному применению следующих двух элементарных операций: присоединяем к рассматриваемой системе два прямо противоположные вектора $\overline{CD}$ и $\overline{DC}$, затем устраняем в полученной после этого системе векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, также прямо противоположные.

Из сказанного следует, что последовательное производство над системой векторов какого угодно числа элементарных операций всегда приводит к системе, эквивалентной данной. Мы покажем ниже (рубр. 51), что и обратно, если две системы эквивалентны, то одну из них можно получить из другой путем выполнения ряда элементарных операций. Вследствие этого *две эквивалентные системы* называют также *приводимыми одна к другой*. Речь идет здесь, таким образом, о приведении одной системы к другой, выполняемом с помощью одних только элементарных операций.

Из этого следует, что за определение двух эквивалентных систем можно было бы принять их взаимную приводимость, как это, действительно, и делал Пуансо [1]).

48. Приводимость всякой системы к трем приложенным векторам. Пусть P_1, P_2, P_3 будут три точки пространства, не расположенные на одной прямой. Рассмотрим сначала один приложенный вектор $\overline{AB}$, начало которого не лежит в плоскости $P_1P_2P_3$.

Мы знаем (рубр. 15), что вектор $\overline{AB}$ можно разложить на три вектора, центрированные в точке A и имеющие прямыми действия AP_1, AP_2, AP_3 (фиг. 20). Перенесем каждый из них на прямой действия так, чтобы они имели точками приложения соответственно P_1, P_2, P_3. Вектор $\overline{AB}$, таким образом, приведен одними элементарными операциями к трем векторам, приложенным в предназначенных точках P_1, P_2, P_3.



Фиг. 20.

Легко видеть, что такое приведение вектора $\overline{AB}$ всегда возможно также и в том случае, когда начало его A лежит в плоскости $P_1P_2P_3$. В самом деле, если вектор $\overline{AB}$ не лежит весь в плоскости $P_1P_2P_3$, то достаточно перенести его по линии действия: начало A выйдет тогда из плоскости $P_1P_2P_3$, и мы окажемся в условиях уже рассмотренного случая. Остается случай, когда прямая AB лежит в плоскости $P_1P_2P_3$. Но тогда из трех прямых AP_1, AP_2, AP_3, по крайней мере, две, скажем, AP_1 и AP_2, не совпадают; наш вектор можно тогда разложить на два (рубр. 15) по прямым AP_1 и AP_2 (один из них может оказаться равным нулю), которые, следовательно, можно будет перенести в точки P_1 и P_2; приведение, таким образом, выполнено, три вектора будут приложены в точках P_1, P_2, P_3, но один из них (а может случиться, что и два) будет нулевым.

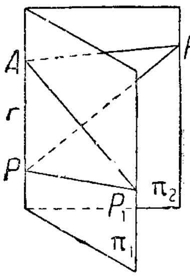
Установив это, уже легко доказать более общее предложение, что всякая система приложенных векторов может быть приведена к трем векторам, приложенным к трем произвольно выбранным точкам, не лежащим на одной прямой. Для этого, очевидно,

[1]) *Л. Пуансо* (Louis Poinsot) родился в Париже в 1777 г., умер также в Париже в 1859 г. Отличался редкой наглядностью и изяществом методов в исследовании многих глубоких вопросов, пользовался исключительно прямыми геометрическими средствами. Классическим является его сочинение „Éléments de statique", Paris — Maillet Bochelier, 10-е издание которого появилось в 1861 г.

будет достаточно произвести требуемое приведение для каждого вектора системы в отдельности, а затем заменить векторы, приложенные в каждой точке, их суммой.

49. Приведение любой системы к двум приложенным векторам. Точнее мы здесь докажем, что любая система приложенных векторов может быть приведена (при помощи одних элементарных операций) к *двум* векторам, один из которых приложен в произвольно выбранной точке.

Выберем произвольно еще две дополнительные точки P_1 и P_2, не расположенные на одной прямой с точкой P (фиг. 21). Согласно доказанному, система может быть приведена к трем векторам $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ (между которыми могут оказаться и нулевые), соответственно приложенным к точкам P, P_1, P_2. Обозначим через π_1 плоскость, проходящую через точку P и содержащую вектор $\boldsymbol{v}_1$ (произвольную плоскость, проходящую через прямую PP_1, если $\boldsymbol{v}_1=0$); аналогично, через π_2 обозначим плоскость, проходящую через точку P и содержащую вектор $\boldsymbol{v}_2$ (произвольную плоскость, проходящую через прямую PP_2, если $\boldsymbol{v}_2=0$).



Фиг. 21.

Рассмотрим сначала наиболее общий случай, когда плоскости π_1 и π_2 не совпадают и прямая их пересечения r не содержит точек P_1 и P_2. На прямой r выберем произвольно точку A, отличную от P. Как известно (рубр. 14 и 41), вектор $\boldsymbol{v}_1$, лежащий в плоскости π_1, эквивалентен двум векторам, приложенным в точке P_1 и лежащим на прямых AP_1 и PP_1; эти последние могут быть затем перенесены по прямым действия (рубр. 40) соответственно в точки P и A. Выполнив такое же приведение по отношению к вектору $\boldsymbol{v}_2$, мы сможем заключить, что данная система приводится к трем векторам, приложенным в точке P, и двум, приложенным в точке A. Теперь достаточно сложить векторы, приложенные в точке A, а также векторы, приложенные в P, чтобы получить требуемое приведение системы к двум векторам, из которых один приложен к точке P.

То же самое рассуждение остается также в силе в исключительных случаях, когда плоскости π_1 и π_2 совпадают или когда прямая их пересечения проходит через одну из точек P_1 или P_2. Во всяком случае, если, скажем, точка P_1 лежит в обеих плоскостях, то достаточно совместить точку A с P_1, и все рассуждение можно будет провести, как выше [1]).

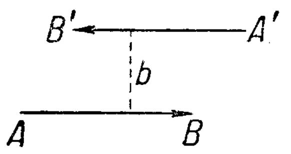
50. Пусть Σ будет какая-либо уравновешенная система (рубр. 46), т. е. имеющая нулевой главный момент и нулевой главный вектор.

---

[1]) Вектор $\boldsymbol{v}_1$ при этом разлагать не придется, а вектор $\boldsymbol{v}_2$ разложим по направлениям AP_2 (P_1P_2) и PP_2; затем первую слагающую перенесем в P_1, а вторую в P (*Ред.*)

Если подвергнем ее приведению, указанному в предыдущей рубрике, то оба вектора, к которым приведение приводит, неизбежно окажутся прямо противоположными (в частности, они будут оба нулевыми, если один из них окажется нулевым); в самом деле, для того чтобы их сумма была равна нулю, эти векторы должны быть противоположны, т. е. (рубр. 15) равны по абсолютной величине и обращены в противоположные стороны; но они должны также иметь общую прямую действия, так как в противном случае их главный момент не обращался бы в нуль: это становится очевидным, если за центр приведения возьмем точку P, лежащую на одной из прямых действия.

Но всякая система, составленная из двух прямо противоположных векторов, при помощи второй элементарной операции (рубр. 47) приводится к одному нулевому вектору. Мы приходим, таким образом, к выводу, что всякая уравновешенная система приводится к *абсолютно нулевой системе*, т. е. не содержащей никаких векторов или, что сводится к тому же, состоящей исключительно из нулевых векторов.



Фиг. 22.

51. Взаимная приводимость двух эквивалентных систем. Теперь мы имеем уже возможность доказать (рубр. 47), что *каждая система* Σ_1 *может быть приведена к любой эквивалентной ей системе* Σ_2.

С этой целью рассмотрим систему Σ_2', составленную из приложенных векторов, прямо противоположных отдельным векторам системы Σ_2. Присоединяя к системе Σ_1 все векторы $\overline{AB}$ системы Σ_2 и соответствующие векторы $\overline{BA}$ системы Σ_2', мы убедимся, что система Σ_1 приводится к сложной системе, составленной из систем Σ_1, Σ_2, Σ_2'.

С другой стороны, каков бы ни был центр приведения, главный момент и главный вектор системы Σ_2', очевидно, равны и противоположны главному моменту и главному вектору системы Σ_2, а следовательно, и системы Σ_1. Вследствие этого векторы системы, составленной из систем Σ_1 и Σ_2', уравновешены; поэтому система Σ_1, Σ_2' может быть, как показано в рубр. 44, приведена к абсолютно нулевой системе. Отсюда следует, что система Σ_1, Σ_2, Σ_2' может быть приведена к одной системе Σ_2.

Таким образом, пользуясь исключительно элементарными операциями, можно перейти от системы Σ_1 к сложной системе Σ_1, Σ_2, Σ_2' и от нее к системе Σ_2.

52. Пары. *Парой* называется всякая система, составленная из двух *противоположных* приложенных векторов, т. е. параллельных, обращенных в противоположные стороны и равных по абсолютной величине (фиг. 22). Расстояние b между параллельными прямыми действия называется *плечом пары*. Иногда бывает полезно вводить еще понятие о *стороне обращения пары*, понимая под этим сторону вращения, которую одинаково определяют оба вектора в своей плоскости относительно произвольной точки O, лежащей между их прямыми действия.

Так как главный вектор всякой пары Г равен нулю, то главные моменты той же пары всегда выражаются эквиполлентными векторами, как бы мы ни выбирали центр приведения (рубр. 39).

Пусть $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$ будут два вектора пары Г. Взяв за центр приведения точку приложения одного из двух векторов, например точку A', мы сейчас же увидим, что момент M пары Г совпадает с моментом второго вектора $\overline{AB}$; он имеет поэтому *длину, равную произведению из плеча пары b на общую длину обоих векторов*; *он перпендикулярен к плоскости пары и имеет относительно AB правостороннее направление* (рубр. 33).

Последнее обстоятельство относится к вектору M, приложенному в точке A'. По соображениям непрерывности вместо A' можно, очевидно, взять любую другую точку, расположенную относительно прямой AB с той же стороны, что и A', — в частности, любую точку P, лежащую внутри полосы, содержащейся между параллелями AB и $A'B'$. Вследствие этого сторону обращения момента M можно характеризовать, сохраняя симметрию относительно обоих векторов, если воспользоваться стороной обращения пары, которую они образуют. Это приведет к следующему предложению. *Для наблюдателя, стоящего ногами в точке O* (произвольно выбранной в полосе, ограниченной прямыми действия обоих векторов) *и обращенного головой в сторону момента M, обращение пары представляется правосторонним.*

53. Из того факта, что главный вектор пары всегда равен нулю, следует, что две пары эквивалентны в том и только в том случае, если для какого-либо центра приведения (а следовательно, и для любого центра) их моменты совпадают.

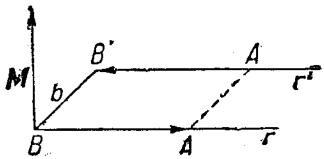
Теперь припомним (рубр. 46), что система с нулевым главным вектором может быть эквивалентна одному (нулевому) вектору только в том случае, если ее момент равен нулю (т. е. если составляющие ее векторы равны нулю или расположены на одной и той же прямой). Отсюда следует, что пара, момент которой отличен от нуля, никогда не может быть эквивалентной одному вектору.

54. Покажем теперь, что любой вектор M можно всегда и притом бесчисленным множеством способов рассматривать как момент некоторой пары Г, при этом бесполезно указывать полюс, так как (рубр. 52) момент пары не зависит от положения полюса.

Чтобы найти одну из таких пар, достаточно, например, взять плоскость π, перпендикулярную к вектору M, и на ней нанести две параллельные прямые r и r' (фиг. 23); если b есть расстояние между этими прямыми, то построим пару Г, приложив на прямых и r' два произвольных вектора $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$, имеющих общую длину $\frac{M}{b}$ и обращенных таким образом, чтобы пара Г оказалась правосторонней по отношению к вектору M, приложенному в точке между параллелями r и r'.

55. Приводимость любой системы к одному вектору и одной паре. Из изложенного вытекает, что *любая система векторов эквивалентна другой системе, состоящей из одного вектора и одной пары.*

В самом деле, возьмем за центр приведения произвольную точку P и приложим в ней главный вектор R заданной системы, далее построим любую пару Г, имеющую своим моментом главный момент M заданной системы.



Фиг. 23.

Система, которая составлена из вектора R, приложенного в точке P, и из пары Г, эквивалентна данной системе. В самом деле, главным вектором ее служит R, а главным моментом — момент пары Г, т. е. M (ибо вектор R, приложенный в центре приведения P, не вносит никакой добавочной слагающей в состав главного момента системы).

56. В рубр. 46 было установлено, при каких условиях системы векторов эквивалентны одному вектору; теперь мы к этому можем прибавить, что система векторов эквивалентна одной паре в том и только в том случае, когда ее главный вектор равен нулю; в частности и эта пара может оказаться нулевой. Присоединяя этот результат к предыдущим, мы можем сделать следующий вывод.

Система, инвариантный трехчлен которой отличен от нуля (в каковом случае ни R, ни M не могут обратиться в нуль, ибо $T = MR$), *всегда эквивалентна одному вектору и одной паре.*

Система же, инвариантный трехчлен которой равен нулю, всегда приводится к более простой системе; эта последняя либо состоит из одного вектора, либо из одной пары, либо вовсе сводится к нулю. Первый случай имеет место, когда главный вектор системы R отличен от нуля (рубр. 46); второй — когда главный вектор R равен нулю, а главный момент M отличен от нуля; третий — когда совместно обращаются в нуль и R и M.

57. В качестве непосредственного приложения мы можем доказать, что следующие системы эквивалентны одному вектору или одной паре (или же, в частности, эквивалентны нулю):

1) *Плоские системы* (т. е. составленные из приложенных векторов, лежащих в одной и той же плоскости).

2) *Параллельные системы* (т. е. составленные из приложенных векторов, параллельных между собой).

Чтобы это доказать, достаточно обнаружить, что в этих случаях обращается в нуль инвариантный трехчлен.

Для плоской системы это обнаруживается, если мы выберем за центр приведения точку в ее плоскости. Моменты отдельных векторов в этом случае все перпендикулярны к той же плоскости, а потому к ней перпендикулярна и их сумма — главный момент системы (если он не обращается в нуль). Главный же вектор системы лежит в той же плоскости (или обращается в нуль). Поэтому скалярное произведение $T = MR$ обращается в нуль (рубр. 20).

В случае системы параллельных векторов, где бы ни был помещен центр приведения, главный момент M, очевидно, перпендикулярен к общему направлению векторов системы (или, в частности, обращается в нуль); главный же вектор, напротив, параллелен им; поэтому и в этом случае $MR = 0$.

Из предыдущей рубрики еще вытекает, что система, состоящая из любого числа каких угодно пар, эквивалентна одной паре, или, в частном случае, нулю, ибо главный вектор такой системы равен нулю.

58. Уравновешенные системы, составленные из двух или трех векторов. Рассмотрим теперь уравновешенные системы (рубр. 46), составленные из двух или трех векторов (само собою разумеется, не нулевых).

Для уравновешенных систем, составленных только из двух векторов, уже было показано (рубр. 50), что эти векторы должны быть прямо противоположными.

Для уравновешенных систем, составленных из трех векторов, можно показать, что такие векторы непременно расположены в одной плоскости и что их прямые действия либо встречаются в одной точке, либо параллельны между собой.

Пусть (A_1, v_1), (A_2, v_2), (A_3, v_3) будут эти три приложенные векторы, r_1, r_2, r_3 — их прямые действия. Если эти прямые совпадают, то требуемое свойство имеет место. Во всяком противном случае векторы можно перенести по прямой действия каждой из них таким образом, чтобы точки их приложения A_1, A_2, A_3 не лежали на одной прямой. Моменты векторов v_1 и v_2 относительно прямой A_1A_2 (ориентированной в ту или другую сторону — все равно) равны нулю (рубр. 37). Но сверх того должен быть равен нулю и главный момент системы (рубр. 46), поэтому момент вектора v_3 относительно той же прямой равен нулю, а потому вектор v_3 расположен в плоскости $A_1A_2A_3$ [1]).

Совершенно таким же образом докажем, что в той же плоскости должны лежать также и векторы v_1 и v_2. Таким образом, первая часть нашего утверждения вполне доказана.

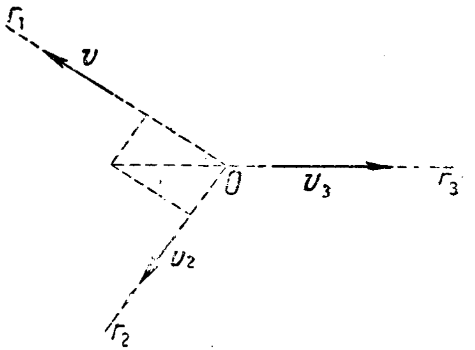
---

[1]) Если центр приведения P взят на прямой A_1A_2, то момент M_3 вектора v_3 перпендикулярен к прямой PA_3, а так как проекция этого момента на прямую A_1A_2 также равна нулю, то он перпендикулярен и к прямой A_1A_2; он перпендикулярен поэтому и к плоскости $A_1A_2A_3$; а так как вектор v_3 перпендикулярен к M_3, то он лежит в плоскости $A_1A_2A_3$. (*Ред.*)

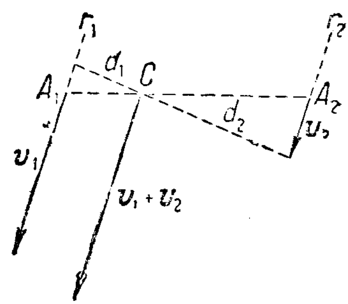
Обращаясь ко второй части, предположим сначала, что прямые r_1 и r_2 встречаются в точке O (фиг. 24). Перенесем два вектора v_1 и v_2 по прямым их действия так, чтобы оба они имели точкой приложения O; сложив после этого перенесения векторы, мы убедимся, что система v_1, v_2 эквивалентна одному вектору, приложенному в точке O. Этот вектор, заменяя собой систему v_1, v_2, от которой он произошел, должен составить вместе с v_3 уравновешенную систему, а для этого необходимо, чтобы он лежал с v_3 на одной прямой, т. е. чтобы прямая r_3 проходила через точку пересечения прямых r_1 и r_2.

Если, напротив, прямые r_1 и r_2 параллельны, то им должна быть параллельна и прямая r_3. В самом деле, если бы прямая r_3 пересекалась, скажем, с прямой r_1, то через точку их пересечения, согласно доказанному, должна была бы проходить и прямая r_2, что противоречит предположению.

В виде приложения вышеустановленного критерия укажем, что три вектора, приложенные в середине сторон треугольника (конечно, в его плоскости) и перпендикулярные к сторонам его в точках приложения, находятся в равновесии, если их длины пропорциональны соответствующим сторонам треугольника и если они все обращены либо внутрь треугольника, либо наружу.



Фиг. 24.



Фиг. 25.

7. Системы приложенных параллельных векторов.

59. В рубр. 57 мы видели, что всякая система приложенных параллельных векторов эквивалентна либо одному вектору, либо одной паре.

Чтобы этот результат уточнить, рассмотрим прежде всего систему двух векторов (A_1, v_1) и (A_2, v_2), *параллельных между собой, обращенных в одну и ту же сторону и приложенных соответственно в точках* A_1 *и* A_2 (фиг. 25).

Поскольку главный вектор системы (v_1, v_2) в этом случае отличен от нуля, она неизбежно эквивалентна (рубр. 56) одному вектору $v_1 + v_2$, приложенному в произвольной точке некоторой