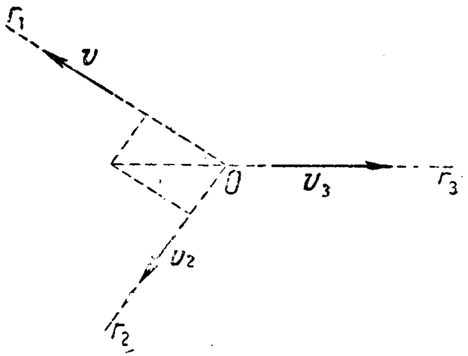
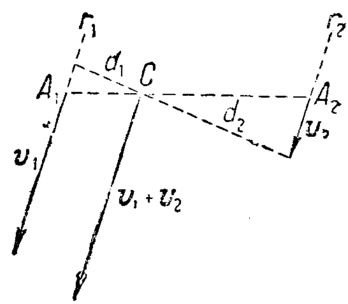
Обращаясь ко второй части, предположим сначала, что прямые r_1 и r_2 встречаются в точке O (фиг. 24). Перенесем два вектора $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ по прямым их действия так, чтобы оба они имели точкой приложения O; сложив после этого перенесения векторы, мы убедимся, что система $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ эквивалентна одному вектору, приложенному в точке O. Этот вектор, заменяя собой систему $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, от которой он произошел, должен составить вместе с $\boldsymbol{v}_3$ уравновешенную систему, а для этого необходимо, чтобы он лежал с $\boldsymbol{v}_3$ на одной прямой, т. е. чтобы прямая r_3 проходила через точку пересечения прямых r_1 и r_2.

Если, напротив, прямые r_1 и r_2 параллельны, то им должна быть параллельна и прямая r_3. В самом деле, если бы прямая r_3 пересекалась, скажем, с прямой r_1, то через точку их пересечения, согласно доказанному, должна была бы проходить и прямая r_2, что противоречит предположению.

В виде приложения вышеустановленного критерия укажем, что три вектора, приложенные в середине сторон треугольника (конечно, в его плоскости) и перпендикулярные к сторонам его в точках приложения, находятся в равновесии, если их длины пропорциональны соответствующим сторонам треугольника и если они все обращены либо внутрь треугольника, либо наружу.



Фиг. 24.



Фиг. 25.

7. Системы приложенных параллельных векторов.

59. В рубр. 57 мы видели, что всякая система приложенных параллельных векторов эквивалентна либо одному вектору, либо одной паре.

Чтобы этот результат уточнить, рассмотрим прежде всего систему двух векторов $(A_1, \boldsymbol{v}_1)$ и $(A_2, \boldsymbol{v}_2)$, *параллельных между собой, обращенных в одну и ту же сторону и приложенных соответственно в точках A_1 и A_2* (фиг. 25).

Поскольку главный вектор системы $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ в этом случае отличен от нуля, она неизбежно эквивалентна (рубр. 56) одному вектору $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, приложенному в произвольной точке некоторой прямой, параллельной прямым действия r_1 и r_2 векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ и расположенной с ними в одной плоскости. Если прямые r_1 и r_2 совпадают, то с ними совпадает и прямая действия приложенного вектора $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, эквивалентного нашей системе. Если мы этот последний случай исключим, то прямая действия вектора $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ пересечет секущую A_1A_2 двух параллелей r_1 и r_2 в некоторой определенной точке C. Займемся разысканием этой точки. Вектор $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, будучи приложен в точке C, имеет относительно нее нулевой момент; следовательно, главный момент системы относительно точки C также должен быть равен нулю; иными словами, моменты векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ относительно точки C должны иметь одну и ту же длину, но должны быть направлены в противоположные стороны. Так как оба момента перпендикулярны к плоскости векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, то последнее условие требует, чтобы по отношению к перпендикуляру к той же плоскости в точке C, в какую бы сторону он ни был обращен, векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, в свою очередь, представлялись обращенными в противоположные стороны: один в правую, другой в левую; а это означает, что точка должна быть расположена между параллелями r_1 и r_2; точнее, она должна лежать внутри отрезка A_1A_2.

С другой стороны, если обозначим через d_1 и d_2 расстояния (нам еще неизвестные) точки C от прямых r_1 и r_2, то моменты векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ относительно C имеют длины d_1v_1 и d_2v_2; а так как эти длины должны быть равны, то

$$d_1v_1=d_2v_2;$$

или, иначе:

$$d_1:d_2=v_2:v_1.$$

Но так как в силу очевидного подобия треугольников

$$d_1:d_2=A_1C:CA_2,$$

то

$$A_1C:CA_2=v_2:v_1;$$

это значит: *система двух параллельных приложенных векторов, обращенных в одну сторону, эквивалентна одному вектору, равному их сумме; этот результирующий вектор приложен к точке, которая лежит внутри отрезка, соединяющего точки приложения рассматриваемых векторов, и делит этот отрезок на части, обратно пропорциональные длинам этих векторов.*

Отсюда следует, что точка C не зависит от направления двух векторов, а определяется точками их приложения и их длинами, — точнее, отношением их длин. Другими словами, точка C не изменится, если мы повернем векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ вокруг точек их приложения (сохраняя их параллельность) и в то же время увеличим (или уменьшим) их длины в одном и том же отношении.

60. Теперь обратимся к системе $(A_1, \boldsymbol{v}_1)$ и $(A_2, \boldsymbol{v}_2)$, *составленной из двух параллельных приложенных векторов, но обращенных в противоположные стороны*; пусть A_1 и A_2 будут точки их приложения (фиг. 26). Если исключим уже рассмотренный случай пары (в частности, двух прямо противоположных векторов), то длины этих векторов будут различны; пусть, скажем, $v_1 > v_2$.

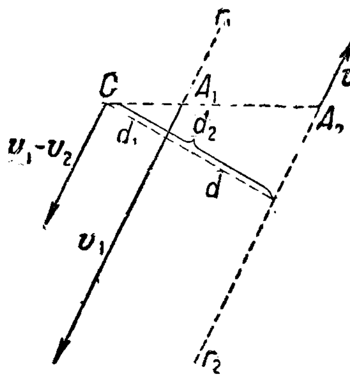
Если прямые действия r_1 и r_2 совпадают, то система, очевидно, эквивалентна одному вектору, который имеет ту же линию действия, обращен в сторону большего вектора $\boldsymbol{v}_1$ и имеет длину $v_1 - v_2$ (разность длин данных векторов).

Если прямые r_1 и r_2 различны, то прямая действия приложенного вектора $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, эквивалентного системе $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$, пересекает прямую A_1A_2 в некоторой точке C; длина вектора $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ в этом случае равна $v_1 - v_2$. Рассуждением, вполне аналогичным тому, которое приведено в предыдущей рубрике, мы обнаружим, что точка C должна быть расположена вне отрезка A_1A_2 и должна отстоять от прямых r_1 и r_2 на расстояния d_1 и d_2, при которых

$$d_1v_1 = d_2v_2, \text{ т. е. } d_1 : d_2 = v_2 : v_1.$$

Отсюда следует

$$A_1C : A_2C = v_2 : v_1.$$



Фиг. 26.

Так как, по предположению, $v_2 < v_1$, то таким же образом $A_1C < A_2C$; это значит — точка C упадет на продолжение отрезка A_1A_2 со стороны вектора $\boldsymbol{v}_1$, имеющего большую длину.

Все сказанное приводит к следующему выводу: *система, состоящая из двух параллельных векторов, которые имеют различные длины и обращены в противоположные стороны, эквивалентна одному вектору, равному сумме $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$; этот результирующий вектор приложен в точке, которая делит отрезок, соединяющий точки приложения данных векторов, внешне на части, обратно пропорциональные длинам двух векторов.*

И в этом случае положение точки C на прямой A_1A_2 зависит только от точек A_1 и A_2 и от отношения $\frac{v_2}{v_1}$; оно сохраняет свое положение, если оба вектора повернем на один и тот же угол или изменим их длины в одном и том же отношении.

Как в том случае, когда векторы обращены в одну и ту же сторону, так и в случае, когда они обращены в противоположные стороны, точка C называется *центром системы параллельных векторов* $(A_1, \boldsymbol{v}_1)$, $(A_2, \boldsymbol{v}_2)$.

61. Если обозначим через d ширину полосы r_1r_2, так что (при сделанном предположении $v_1 > v_2$) $d_2 = d + d_1$, то из соотношения $d_1v_1 = (d + d_1)v_2$ получим:

$$d_1 = \frac{dv_2}{v_1 - v_2}.$$

Если будем сохранять постоянным и расстояние d прямых действия и длину вектора $\boldsymbol{v}_2$, но в то же время будем уменьшать длину вектора $\boldsymbol{v}_1$ так, чтобы она стремилась к v_2, то d_1 будет неограниченно возрастать; это значит, центр двух параллельных векторов, стремящихся составить пару, неограниченно удаляется.

Поэтому пара (рассматриваемая как предельный случай системы двух параллельных векторов, направленных в противоположные стороны, когда их длины стремятся к совпадению) часто уподобляется бесконечно малым и в то же время бесконечно удаленным векторам.

62. В третью очередь рассмотрим систему Σ, состоящую из нескольких приложенных векторов $(A_1, \boldsymbol{v}_1)$, $(A_2, \boldsymbol{v}_2), \ldots, (A_n, \boldsymbol{v}_n)$, параллельных и обращенных в одну и ту же сторону; как обыкновенно, обозначим через v_i длину вектора $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Из рубр. 59 следует, что векторы $(A_1, \boldsymbol{v}_1)$ и $(A_2, \boldsymbol{v}_2)$ можно заменить одним вектором $(C^{(1)}, \boldsymbol{R}_1)$, имеющим то же направление и ту же сторону обращения, что и данные векторы; далее, векторы $(C^{(1)}, \boldsymbol{R}_1)$ и $(A_3, \boldsymbol{v}_3)$ можно заменить вектором $\boldsymbol{R}_3$, имеющим то же самое направление. Следуя этому пути далее, мы придем к определенному приложенному вектору $(C, \boldsymbol{R})$ [для сохранения единства обозначений его следовало бы, собственно, обозначить через $(C^{(n-1)}, \boldsymbol{R}_{n-1})$], который эквивалентен данной системе векторов Σ, имеет общее с ними направление и обращен в ту же сторону. Из соображений той же рубрики 59 следует, что длина вектора R равна сумме длин данных векторов: $R = \sum_{1}^{n}{}_i v_i$. Ясно также, что линия действия вектора $\boldsymbol{R}$ проходит через точку C, которая может быть получена следующим образом: на отрезке A_1A_2 нужно взять точку $C^{(1)}$ таким образом, чтобы отношение отрезков $A_1C^{(1)}$ к $C^{(1)}A_2$ было равно $v_2 : v_1$; далее, на отрезке $C^{(1)}A_3$ взять точку $C^{(2)}$ таким образом, чтобы отношение $\frac{C^{(1)}C^{(2)}}{C^{(2)}A_3}$ было равно $\frac{v_3}{v_1 + v_2}$, и т. д.; наконец, на отрезке $C^{(n-2)}A_n$ нужно взять точку C так, чтобы

$$\frac{C^{(n-2)}C}{CA_n} = \frac{v_n}{v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}}.$$

Из этого геометрического построения явствует, что положение точки C не изменится, если мы изменим общее направление всех векторов, сохраняя их начала и их длины (или — более общим образом — сохраняя отношение их длин).

Далее, если через x_i, y_i, z_i обозначим координаты точки A_i, то из элементарных соображений аналитической геометрии следует, что координаты x_0, y_0, z_0 точки C даны формулами:

$$x_0 = \frac{\sum_1^n {}_i v_i x_i}{R}, \quad y_0 = \frac{\sum_1^n {}_i v_i y_i}{R}, \quad z_0 = \frac{\sum_1^n {}_i v_i z_i}{R}. \tag{34}$$

Эти формулы обнаруживают, что мы придем к той же точке C, в каком бы порядке ни были взяты данные точки.

Полезно еще отметить, что формулы (42) можно объединить в одной векториальной формуле, вводя вместо координат точек A_i их радиусы-векторы относительно любого начала O, именно

$$\overline{OC} = \frac{\sum_1^n v_i \overline{OA_i}}{R}; \tag{34'}$$

это явно вытекает из того факта, что мы придем вновь к формулам (34), если возьмем компоненты радиусов-векторов $\overline{OA_i}$ и $\overline{OC}$ по осям координат.

63. Что система $\sum$ эквивалентна вектору $\boldsymbol{R} = \sum_1^n {}_i \boldsymbol{v}_i$, приложенному в точке C, можно доказать чисто аналитически следующим образом.

Обозначим через $\boldsymbol{k}$ общий версор всех данных векторов, т. е. единичный вектор, имеющий то же направление и ту же сторону обращения, что и данные векторы. Тогда (рубр. 17) $\boldsymbol{v}_i = v_i \boldsymbol{k}$ и

$$\sum_1^n {}_i \boldsymbol{v}_i = \sum_1^n {}_i v_i \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \sum_1^n v_i = \boldsymbol{k} R.$$

Теперь составим главный момент $\boldsymbol{M}$ системы относительно точки O. Каждый вектор даст для этого слагающую (рубр. 34):

$$[\overline{OA_i} \boldsymbol{v}_i] = v_i [\overline{OA_i} \boldsymbol{k}].$$

Суммируя эти равенства и опираясь на равенства (34'), мы получим:

$$\boldsymbol{M} = R\ [\overline{OC}\ \boldsymbol{k}] = [\overline{OC}\ R\boldsymbol{k}] = [\overline{OC}\ \boldsymbol{R}].$$

Отсюда ясно, что момент $\boldsymbol{M}$ системы $\sum$ (относительно точки O) совпадает с аналогичным моментом одного вектора $\boldsymbol{R}$, приложенного в точке C. Этот вектор, таким образом, эквивалентен системе $\sum$.

64. Рассмотрим, наконец, систему $\sum$, составленную из нескольких параллельных векторов, которые не все обращены в одну и ту же сторону; пусть $\sum_1$ и $\sum_2$ будут две системы, составленные из векторов системы $\sum$, обращенных в одну и другую стороны.

В силу того, что установлено в предыдущей рубрике, каждая из систем $\sum_1$ и $\sum_2$ может быть приведена к одному вектору; приведение системы сводит ее, таким образом, к двум векторам, обращенным в противоположные стороны,—случай, рассмотренный в рубр. 60.

Обозначим через v_i $(i=1, 2, 3, \ldots, p)$ длины векторов системы $\sum_1$, через w_j $(j=1, 2, 3, \ldots, q)$ длины векторов системы $\sum_2$; далее, положим:

$$R=\sum_1^p{}_i v_i, \quad S=\sum_1^q{}_i w_j.$$

Если $R=S$ система сводится к паре (а в частном случае просто к нулю).

Если же $R \neq S$, то система эквивалентна одному вектору, приложенному в некоторой точке C, положение которой зависит от длин векторов системы $\sum$, от положения точек их приложения, но не от общего их направления.

Во всех случаях точка C называется *центром* системы параллельных векторов.

8. Диференцирование переменного вектора.

65. Предположим, что каждому значению параметра t, содержащемуся в интервале между t_0 и t_1, соответствует вектор $\boldsymbol{v}$, однозначно определенный.

В соответствии с таким расширением понятия о функции (со скалярных величин на векторы) мы будем при этих условиях говорить, что вектор $\boldsymbol{v}$ представляет собою *функцию параметра* (или *независимой переменной*) t в интервале от t_0 до t_1, и будем писать $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$. Такая векторная функция $\boldsymbol{v}(t)$ называется *конечной* в интервале от t_0 до t_1, если в этом интервале остается конечным модуль $v(t)$; она называется непрерывной при данном значении t, если каждому положительному числу ε, как бы мало оно ни было, соответствует охватывающая это значение окрестность, для каждого значения которой t' векторная разность $\boldsymbol{v}(t')-\boldsymbol{v}(t)$ становится по модулю меньше ε.

Выбрав между t и t_1 произвольный интервал от t до $t+\Delta t$, положим:

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$$

и рассмотрим вектор

$$\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t},$$