в одну и ту же сторону; пусть $\sum_1$ и $\sum_2$ будут две системы, составленные из векторов системы $\sum$, обращенных в одну и другую стороны.

В силу того, что установлено в предыдущей рубрике, каждая из систем $\sum_1$ и $\sum_2$ может быть приведена к одному вектору; приведение системы сводит ее, таким образом, к двум векторам, обращенным в противоположные стороны,— случай, рассмотренный в рубр. 60.

Обозначим через v_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, p)$ длины векторов системы $\sum_1$, через w_j $(j = 1, 2, 3, \ldots, q)$ длины векторов системы $\sum_2$; далее, положим:

$$R = \sum_1^p {}_i v_i, \quad S = \sum_1^q {}_i w_j.$$

Если $R = S$ система сводится к паре (а в частном случае просто к нулю).

Если же $R \neq S$, то система эквивалентна одному вектору, приложенному в некоторой точке C, положение которой зависит от длин векторов системы $\sum$, от положения точек их приложения, но не от общего их направления.

Во всех случаях точка C называется *центром* системы параллельных векторов.

8. Диференцирование переменного вектора.

65. Предположим, что каждому значению параметра t, содержащемуся в интервале между t_0 и t_1, соответствует вектор $\boldsymbol{v}$, однозначно определенный.

В соответствии с таким расширением понятия о функции (со скалярных величин на векторы) мы будем при этих условиях говорить, что вектор $\boldsymbol{v}$ представляет собою *функцию параметра* (или *независимой переменной*) t в интервале от t_0 до t_1, и будем писать $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$. Такая векторная функция $\boldsymbol{v}(t)$ называется *конечной* в интервале от t_0 до t_1, если в этом интервале остается конечным модуль $v(t)$; она называется непрерывной при данном значении t, если каждому положительному числу ε, как бы мало оно ни было, соответствует охватывающая это значение окрестность, для каждого значения которой t' векторная разность $\boldsymbol{v}(t') - \boldsymbol{v}(t)$ становится по модулю меньше ε.

Выбрав между t и t_1 произвольный интервал от t до $t + \Delta t$, положим:

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)$$

и рассмотрим вектор

$$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t},$$

который мы будем называть *вектором среднего нарастания* функции $\boldsymbol{v}(t)$ в интервале от t до $t+\Delta t$. Сохраняя неизменным значение t, будем уменьшать значение Δt, неограниченно приближая его к нулю; если при этом вектор среднего нарастания стремится к определенному вектору (в том смысле, что либо длина его стремится к нулю, и тогда предельный вектор будет нулевым, либо же как длина, так и направление стремятся соответственно к определенным предельным значениям), то этот предел называется *производной векторной функции* $\boldsymbol{v}(t)$ для данного значения t параметра и обозначается через $\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}$ или, проще, через $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$.

Если при этом изменении вектор все время остается параллельным одной и той же прямой или одной и той же плоскости, то то же имеет место по отношению к разности $\Delta\boldsymbol{v}$, *а потому и по отношению к вектору среднего нарастания; поэтому той же прямой или той же плоскости будет параллелен и предельный вектор* $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$.

Так как вектор $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$, в свою очередь, представляет собой функцию от t, то можно определить производную от векторной функции $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$; ее называют *второй производной* вектора $\boldsymbol{v}$ и обозначают символом $\frac{d^2\boldsymbol{v}}{dt^2}$ или $\ddot{\boldsymbol{v}}(t)$; таким же образом определяются производные более высоких порядков.

66. Из того факта, что вектор среднего нарастания $\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$ стремится к пределу $\dot{\boldsymbol{v}}$, когда Δt стремится к нулю, следует, что разность

$$\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} - \dot{\boldsymbol{v}} = \bar{\varepsilon}$$

представляет собою *бесконечно-малую*, совместно со скаляром Δt в том смысле, что длина вектора $\bar{\varepsilon}$ становится бесконечно-малой вместе с Δt. Обобщая поэтому хорошо известную терминологию исчисления бесконечно-малых, мы можем сказать, что разность

$$\Delta\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{v}}\,\Delta t = \bar{\varepsilon}\,\Delta t$$

представляет собою относительно Δt бесконечно-малую порядка выше первого.

Подставляя вместо Δt, как в анализе, dt, мы будем также называть *диференциалом* (векторной) *функции* $\boldsymbol{v}(t)$ произведение $\dot{\boldsymbol{v}}\,dt$ и будем его обозначать через $d\boldsymbol{v}$; вместе с тем, мы можем высказать предложение, совершенно совпадающее с тем, которое имеет место для скалярных функций: наращение $\Delta\boldsymbol{v}$, которое получает $\boldsymbol{v}$ в элементарном интервале dt, отличается от $d\boldsymbol{v}$ на бесконечно-малую порядка выше первого.

67. Если мы отнесем вектор $\boldsymbol{v}(t)$ к декартовым осям $Oxyz$, то его компоненты X, Y, Z, очевидно, представляют собой функции t;

если, сверх того, векторная функция однозначна, конечна и непрерывна, то, очевидно, непрерывны и скалярные функции $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, и обратно.

Вектор среднего нарастания функции $\boldsymbol{v}$ имеет компоненты:

$$\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}, \quad \frac{Y(t+\Delta t)-Y(t)}{\Delta t}, \quad \frac{Z(t+\Delta t)-Z(t)}{\Delta t},$$

т. е. средние нарастания соответствующих скалярных функций; отсюда следует, что существование производной $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$ влечет за собой существование производных от компонент, и обратно. Таким образом вопрос о существовании векторных производных сводится к тому, допускают ли производные соответствующих порядков их скалярные компоненты X, Y, Z и т. д.

Предыдущие соображения доказывают, кроме того, что компоненты производной $\dot{\boldsymbol{v}}$ вектора $\boldsymbol{v}$ выражаются скалярными производными $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$; компоненты производной второго порядка $\ddot{\boldsymbol{v}}$ выражаются через $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$, $\ddot{Z}$ и т. д.

68. Из сказанного следует, что для векторного диференцирования имеют силу правила обыкновенного диференцирования. Например, производная постоянного вектора равна нулю; два вектора, имеющие равные производные, отличаются один от другого на постоянный вектор; производная суммы двух векторов равна сумме производных слагающих векторов; если вектор $\boldsymbol{v}$ представляет собою функцию переменной s, которая, в свою очередь, зависит от параметра t, то (правило диференцирования сложной функции)

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}\,\frac{ds}{dt} \quad \text{и т. д.}$$

Если m означает скаляр, а $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ векторы, причем как m так и $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ зависят от параметра t, то по отношению к произведениям трех типов:

$$m\boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2, \quad [\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$$

применимо то же правило диференцирования, которое имеет место по отношению к обыкновенному произведению; это значит, имеют место формулы:

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}_1)=\frac{dm}{dt}\boldsymbol{v}_1+m\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2)=\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt}\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]=\left[\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt}\boldsymbol{v}_2\right]+\left[\boldsymbol{v}_1\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt}\right].$$

Доказательство во всех этих случаях получается непосредственно; для первой и третьей формул достаточно обратиться к компонентам (рубр. 17 и 27) и показать, что соответствующие компоненты правой и левой частей, действительно, совпадают.

Для доказательства второй формулы достаточно развернуть левую часть согласно формуле (15) рубр. 20 и констатировать, что диференцирование дает тот же результат, что и в правой части[1]).

Интересное следствие правила диференцирования скалярного произведения получим, если положим $v_1 = v_2 = v$ и допустим что вектор v имеет постоянную длину; тогда постоянное значение имеет и произведение $v = v^2$, диференцируя которое получаем $v \frac{dv}{dt} = 0$; а это означает: *производная вектора v, который меняется (по направлению), сохраняя постоянную длину, перпендикулярна к вектору v или равна нулю.*

69. Предыдущие соображения показывают, как можно распространить на векторные функции формальные результаты диференциального исчисления.

Так, например, можно установить, как и в диференциальном исчислении, разложение, соответствующее строке Тэйлора, остановленное на произвольном члене (правда, при несколько менее определенном выражении остаточного члена).

В первую очередь имеет место так называемая теорема о среднем значении, которая остается в силе для любой векторной функции, конечной и непрерывной, вместе со своей первой производной в интервале (t, t_1). Соответствующая формула (которую можно также установить, применяя разложение Тэйлора к компонентам), гласит:

$$v(t_1) = v(t) + (t_1 - t)\,\{\dot{v}(t) + \bar{\varepsilon}\}, \tag{35}$$

где $\bar{\varepsilon}$ может быть в общем случае определено только[2]) как (векторная) функция от t_1 (и от t), конечная и непрерывная, стремящаяся к нулю вместе с разностью $t_1 - t$. При такой неопределенности функции $\bar{\varepsilon}$ соотношение (35) вносит нечто существенное только в том случае, когда t_1 стремится к t. С другой

---

[1]) Заметим, что в этом постоянном апеллировании к компонентам нет необходимости: каждая из этих формул может быть доказана непосредственно, совершенно аналогично тому, как соответствующее соотношение доказывается для скалярных функций. Так, если через f обозначим произведение $v_1 v_2$, то

$$f = v_1 v_2,\quad f + \Delta f = (v_1 + \Delta v_1)\,(v_2 + \Delta v_2);$$
$$\Delta f = v_2\,\Delta v + v_1\,\Delta v_2 + \Delta v_1\,\Delta v_2;$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\Delta v_1}{\Delta t} v_2 + v_1 \frac{\Delta v_2}{\Delta t} + \frac{\Delta v_1}{\Delta t}\,\Delta v_2.$$

Отсюда, переходя к пределу, получим требуемое соотношение, конечно, в предположении, что отношения $\frac{\Delta v_1}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta v_2}{\Delta t}$ стремятся к конечным пределам. (*Ред.*)

[2]) В отличие от приращения скалярной функции, где остаточный член может быть в аналогичном случае выражен произведением из $\frac{(t_1 - t)^2}{2}$ и значения второй производной при некотором промежуточном значении t. (*Ред.*)

стороны, разность $v(t_1)-v(t)$ есть не что иное, как наращение Δv; поэтому соотношение (35) не прибавляет ничего нового к тому, что было изложено в рубр. 66.

Если предположить, далее, что в том же интервале остается конечной и непрерывной и вторая производная $\ddot{v}$, то разложение можно продлить до второго члена, именно:

$$v(t_1)=v(t)+(t_1-t)\dot{v}(t)+\frac{1}{2}(t_1-t)^2\{\ddot{v}(t)+\bar{\varepsilon}\}, \tag{36}$$

где $\bar{\varepsilon}$ опять-таки стремится к нулю вместе с разностью t_1-t.

Разумеется, это $\bar{\varepsilon}$, вообще говоря, отлично от того, которое фигурировало в (35).

70. Предположим, что каждой точке P некоторой кривой l соответствует некоторый вектор $v(P)$, однозначно в этой точке определенный. Мы имеем в этом случае *вектор, представляющий собою функцию точек кривой.* Но легко видеть, что это понятие не отличается существенно от понятия о векторе как функции параметра, которое установлено выше. В самом деле, представим себе, что точкам кривой l однозначно и непрерывно отнесены значения некоторого параметра, например длина s дуги кривой l (отсчитываемая от какой-либо постоянной ее точки в определенную сторону). Если вектор v представляет собою однозначную и непрерывную функцию точки P, то его можно рассматривать также как такую же функцию параметра s и обратно.

Наряду с функциями точек кривой часто приходится рассматривать также *функции точек поверхности или некоторой области пространства.* Мы получим, например, векторную функцию точек поверхности, если каждой ее точке отнесем вектор определенной длины (постоянной для всех точек или меняющейся от точки к точке), приложенный в точке P и направленный по нормали к поверхности в определенную сторону.

В физике мы особенно часто встречаем векторы, явно представляющие собою функции точек некоторой области в пространстве. Достаточно остановиться на понятии о силовом поле, которое мы считаем настолько известным из физики, что будем им свободно оперировать в дальнейшем. Другой пример представляет собою некоторая масса движущейся жидкости, если каждой точке области, в которой имеет место движение, отнесем вектор, выражающий направление и силу (напряжение) тока [1]).

Наконец, если дан приложенный вектор v и каждой точке P пространства отнесем вектор M, представляющий собою момент данного вектора v относительно точки P, то мы будем иметь векторную функцию M точек пространства.

Подобно тому как векторы, представляющие собою функции точек кривой, можно рассматривать как геометрическое изобра-

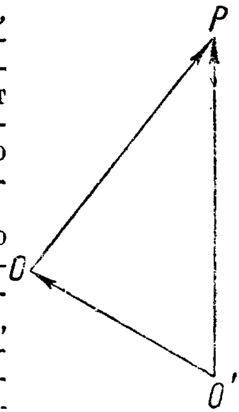
---

[1]) Здесь можно представить себе, что жидкость занимает некоторую часть пространства, например наполняет неподвижный сосуд, а движение заключается в передвижении частиц жидкости внутри нее. (*Ред.*)

жение функции (векторной) одного параметра, так векторные функции точек поверхности или пространственной области можно рассматривать как *геометрические функции соответственно двух или трех параметров.* Естественно, обобщение этих идей приводит *к векторным функциям какого угодно числа параметров*; совершенно ясно, как в каждом таком случае нужно понимать непрерывность функции.

9. Диференцирование переменной точки.

71. Подобно тому как это сделано для векторов, мы предположим, что при тех или иных условиях каждому значению параметра t (содержащемуся в определенном интервале) соответствует некоторая точка P. Так, например, если s, как выше, означает длину дуги некоторой кривой, отсчитываемой от определенного начала, то каждому значению s отвечает определенная точка P кривой. В таких случаях мы будем, естественно, говорить, что *точка P представляет собою функцию параметра t* и будем ее обозначать через $P(t)$.



Фиг. 27.

Предположим теперь, что речь идет о *непрерывной функции* $P(t)$, т. е. что значениям t' параметра, достаточно близким к значению t, всегда соответствуют точки $P(t')$, сколь угодно близкие к $P(t)$. При этих условиях естественно перенести и на эти своеобразные функции понятие о диференцировании и о производных различных порядков. К этому приводят следующие соображения.

Выберем произвольно начало O; тогда радиус-вектор $\overline{OP}$ точки P представляет собою вместе с P функцию параметра t. Эта функция зависит, однако, не только от t, но и от положения начала O. Однако *производная радиуса-вектора* $\frac{d\overline{OP}}{dt}$ *от положения начала не зависит.* В самом деле, если выберем другое начало O' (фиг. 27), то

$$\overline{O'P} = \overline{O'O} + \overline{OP};$$

так как вектор $\overline{O'O}$ при изменении положения точки P остается постоянным, то (рубр. 68)

$$\frac{d\overline{O'P}}{dt} = \frac{d\overline{OP}}{dt}.$$

Производная $\frac{d\overline{OP}}{dt}$ определяется, таким образом, вполне функцией $P(t)$. Ее целесообразно рассматривать поэтому как *производную точки*, т. е. как производную функции $P(t)$; в письме:

$$P' = \frac{dP}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} = \frac{d\overline{OP}}{dt} \qquad (37)$$