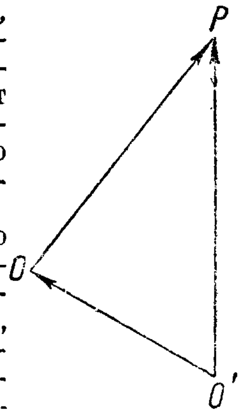
жение функции (векторной) одного параметра, так векторные функции точек поверхности или пространственной области можно рассматривать как *геометрические функции соответственно двух или трех параметров.* Естественно, обобщение этих идей приводит *к векторным функциям какого угодно числа параметров*; совершенно ясно, как в каждом таком случае нужно понимать непрерывность функции.

9. Диференцирование переменной точки.

71. Подобно тому как это сделано для векторов, мы предположим, что при тех или иных условиях каждому значению параметра t (содержащемуся в определенном интервале) соответствует некоторая точка P. Так, например, если s, как выше, означает длину дуги некоторой кривой, отсчитываемой от определенного начала, то каждому значению s отвечает определенная точка P кривой. В таких случаях мы будем, естественно, говорить, что *точка P представляет собою функцию параметра t* и будем ее обозначать через $P(t)$.

Предположим теперь, что речь идет о *непрерывной функции* $P(t)$, т. е. что значениям t' параметра, достаточно близким к значению t, всегда соответствуют точки $P(t')$, сколь угодно близкие к $P(t)$. При этих условиях естественно перенести и на эти своеобразные функции понятие о диференцировании и о производных различных порядков. К этому приводят следующие соображения.



Фиг. 27.

Выберем произвольно начало O; тогда радиус-вектор $\overline{OP}$ точки P представляет собою вместе с P функцию параметра t. Эта функция зависит, однако, не только от t, но и от положения начала O. Однако *производная радиуса-вектора* $\frac{d\overline{OP}}{dt}$ *от положения начала не зависит.* В самом деле, если выберем другое начало O' (фиг. 27), то

$$\overline{O'P} = \overline{O'O} + \overline{OP};$$

так как вектор $\overline{O'O}$ при изменении положения точки P остается постоянным, то (рубр. 68)

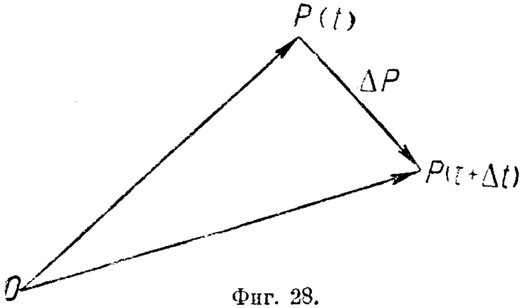
$$\frac{d\overline{O'P}}{dt} = \frac{d\overline{OP}}{dt}.$$

Производная $\frac{d\overline{OP}}{dt}$ определяется, таким образом, вполне функцией $P(t)$. Ее целесообразно рассматривать поэтому как *производную точки*, т. е. как производную функции $P(t)$; в письме:

$$P' = \frac{dP}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} = \frac{d\overline{OP}}{dt} \tag{37}$$

72. Если точка P остается постоянной то постоянное значение сохраняет также и радиус-вектор $\overline{OP}$, а потому (рубр. 68) производная $\dot{P}$ в этом случае равна нулю.

Заметим, что при координации предыдущей рубрики независимым от выбора начала является не только производный вектор $\dot{\overline{OP}}$, но и наращение, которое этот вектор получает, когда мы переходим от значения параметра t к значению $t+\Delta t$.



Фиг. 28.

В самом деле, это наращение представляет собою вектор, идущий от точки $P(t)$ к точке $P(t+\Delta t)$ (фиг. 28), и, следовательно, сохраняет свое значение, как бы мы ни меняли начало O. Поэтому и это наращение можно рассматривать как наращение функции $P(t)$, что и выражается положением:

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t) = \overline{OP}(t+\Delta t) - \overline{OP}(t) = \overline{PP'}, \qquad (37')$$

где $P' = P(t+\Delta t)$. Можно сказать, именно то обстоятельство, что наращение $\Delta\overline{OP}$ не зависит от выбора начала O, влечет за собой независимость от начала производной $\dot{\overline{OP}}$; этим и оправдываются обозначения (37) и (37'). Существенно важно отдавать себе ясный отчет в том, что *как ΔP, так и $\dot{P}$ суть векторы.*

Вообще, когда t изменяется непрерывно, то точка $P(t)$ описывает непрерывную кривую l; наращение ΔP представляет собою вектор, изображаемый хордой этой кривой, идущей от точки $P(t)$ к точке $P(t+\Delta t)$. Поэтому предельный вектор $\dot{P}$ имеет направление касательной к кривой l в точке $P(t)$. Еще точнее, если как для кривой l, так и для соответственных касательных примем за положительную сторону обращения ту, в которую возрастают значения параметра t, то производная $\dot{P}(t)$ имеет то же направление и ту же сторону обращения, что и касательная в точке t.

Далее, как и в случае вектора (рубр. 66), введем *понятие дифференциале переменной точки $P(t)$*, полагая

$$dP = \dot{P}\,dt.$$

При этом определении сохраняется и основное свойство дифференциала; именно, наращение *функции (точки)* $\Delta P(t) = P(t+\Delta t) - P(t)$ *отличается от дифференциала $dP(t)$ на бесконечно-малую порядка выше первого.* В соответствии с этим дифференциал dP часто *называют элементарным смещением точки P* (относительно бесконечно малого интервала dt).

73. Относительно существования производной $\dot{P}(t)$ и аналитического выражения ее компонент имеют место соображения, совпадающие с теми, которые были развиты по отношению к векторам в рубр. 67. В самом деле, координаты

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

точки $P(t)$ представляют собою в то же время компоненты радиуса-вектора $\overline{OP}$. Поэтому для существования производной $\dot{P}(t)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали производные $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$, которые и представляют собой компоненты производной $\dot{P}(t)$ по осям координат.

Отсюда вытекает, в частности, справедливость правила диференцирования сложной функции: *если P зависит от t через посредство другого параметра s, который, в свою очередь, представляет собою функцию от t, то*

$$\dot{P} = \frac{dP}{ds}\dot{s}.$$

Наконец, отметим еще, что, поскольку производная $\dot{P}(t)$ переменной точки $P(t)$ представляет собою вектор, зависящий от параметра t, можно рассматривать производную от $\dot{P}(t)$. Этот новый вектор называется *второй производной* точки $P(t)$ и обозначается через $\frac{d^2P}{dt^2}$ или через $\ddot{P}$; его компонентами служат вторые производные $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, $\ddot{z}(t)$. Таким же образом определяются производные от $P(t)$ порядка выше второго.

74. Пусть $\overline{OP}$ будет переменный вектор, приложенный в постоянной точке O. Мы можем принять O за начало и смотреть на $\overline{OP}$ как на радиус-вектор переменной точки $P(t)$. Тогда

$$\dot{\overline{OP}}(t) = \dot{P}(t).$$

Иными словами, *производная переменного вектора $\overline{OP}$, выходящего из постоянной точки O, есть вектор, совпадающий с производной его свободного конца.* По существу, это лишь иначе формулированное определение производной переменной точки. То же относится, конечно, и к производным более высоких порядков.

Перефразировав рассуждения рубр. 69, касающиеся разложения (36) переменного вектора в строку Тэйлора, мы придем к такому же разложению переменной точки, именно:

$$\Delta P(t) = P(t_1) - P(t) = (t_1 - t)\dot{P}(t) + \frac{1}{2}(t_1 - t)^2\{\ddot{P}(t) + \bar{\varepsilon}\}, \qquad (38)$$

где $\bar{\varepsilon}$ стремится к нулю вместе с разностью $t_1 - t$; как левая, так и правая части представляют собою векторы, зависящие от t.

75. Особого указания заслуживает случай, в котором параметр t совпадает с длиной дуги s, описанной переменной точкой P. Точнее, предположим, как в рубр. 70, что задана определенная кривая l и на ней отсчитываются длины s дуг, начиная от некоторой произвольно выбранной точки P_0; число s

считается положительным в одну сторону от P_0 и отрицательным в другую. Каждому значению s (в интервале, зависящем от участка кривой l, в пределах которого производится исследование), таким образом, отвечает определенная точка P кривой.

Остановимся на производной

$$t = \frac{dP}{ds}$$

этой точки, представляющей собою функцию дуги s. Мы уже знаем (рубр. 73), что эта производная представляет собою вектор, направленный по касательной к кривой в точке P и обращенный в сторону возрастающих значений криволинейной абсциссы s.

Но в данном случае имеет место особое обстоятельство, заключающееся в том, что длина вектора t всегда равна 1. Чтобы в этом убедиться, достаточно обратиться к определению вектора t, представляющего собою предел отношения наращений $\frac{\Delta P}{\Delta s}$. Длина вектора $\frac{\Delta P}{\Delta s}$ есть отношение длины хорды (длины вектора ΔP, см. рубр. 73) к длине дуги Δs. Как известно, это отношение имеет пределом 1; это и есть длина вектора t.

10. Интегрирование векторов.

76. Пусть v будет переменный вектор, представляющий собой непрерывную функцию параметра t в некотором интервале (t_0, t_1); пусть X, Y, Z будут соответствующие компоненты.

При этих условиях будут вполне определены интегралы:

$$\int_{t_0}^{t_1} X\,dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} Y dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt.$$

Вектор I, имеющий значения этих интегралов своими компонентами, называется *определенным интегралом вектора* v, взятым в интервале (t_0, t_1), и обозначается символом:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt.$$

Очень легко показать, что определенный таким образом интеграл I можно, действительно, рассматривать как предел суммы (векториальной), которая получается, если разделим интервал (t_0, t_1) на элементы Δt и любое значение вектора v внутри каждого интервала Δt помножим на его длину Δt, а затем полученные таким образом произведения (векторы) сложим [1]).

[1]) Если мы составим компоненты каждого слагаемого, то они, очевидно, выразятся произведениями $X'\Delta t$, $Y'\Delta t$, $Z'\Delta t$, где X', Y', Z' суть компоненты взятого внутри интервала Δt вектора v. Поэтому вся векторная сумма $\sum v\Delta t$ будет иметь компонентами суммы

$$\sum X'\Delta t, \quad \sum Y'\Delta t, \quad \sum Z'\Delta t,$$

имеющие своими пределами приведенные в тексте интегралы, которыми определяются компоненты вектора I. (*Ред.*)