считается положительным в одну сторону от P_0 и отрицательным в другую. Каждому значению s (в интервале, зависящем от участка кривой l, в пределах которого производится исследование), таким образом, отвечает определенная точка P кривой.

Остановимся на производной

$$\boldsymbol{t} = \frac{dP}{ds}$$

этой точки, представляющей собою функцию дуги s. Мы уже знаем (рубр. 73), что эта производная представляет собою вектор, направленный по касательной к кривой в точке P и обращенный в сторону возрастающих значений криволинейной абсциссы s.

Но в данном случае имеет место особое обстоятельство, заключающееся в том, что длина вектора $\boldsymbol{t}$ всегда равна 1. Чтобы в этом убедиться, достаточно обратиться к определению вектора $\boldsymbol{t}$, представляющего собою предел отношения наращений $\frac{\Delta P}{\Delta s}$. Длина вектора $\frac{\Delta P}{\Delta s}$ есть отношение длины хорды (длины вектора ΔP, см. рубр. 73) к длине дуги Δs. Как известно, это отношение имеет пределом 1; это и есть длина вектора $\boldsymbol{t}$.

10. Интегрирование векторов.

76. Пусть $\boldsymbol{v}$ будет переменный вектор, представляющий собой непрерывную функцию параметра t в некотором интервале (t_0, t_1); пусть X, Y, Z будут соответствующие компоненты.

При этих условиях будут вполне определены интегралы:

$$\int_{t_0}^{t_1} X\,dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} Y dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt.$$

Вектор $\boldsymbol{I}$, имеющий значения этих интегралов своими компонентами, называется *определенным интегралом вектора* $\boldsymbol{v}$, взятым в интервале (t_0, t_1), и обозначается символом:

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}\,dt.$$

Очень легко показать, что определенный таким образом интеграл $\boldsymbol{I}$ можно, действительно, рассматривать как предел суммы (векториальной), которая получается, если разделим интервал (t_0, t_1) на элементы Δt и любое значение вектора $\boldsymbol{v}$ внутри каждого интервала Δt помножим на его длину Δt, а затем полученные таким образом произведения (векторы) сложим [1]).

[1]) Если мы составим компоненты каждого слагаемого, то они, очевидно, выразятся произведениями $X'\Delta t$, $Y'\Delta t$, $Z'\Delta t$, где X', Y', Z' суть компоненты взятого внутри интервала Δt вектора $\boldsymbol{v}$. Поэтому вся векторная сумма $\sum \boldsymbol{v}\Delta t$ будет иметь компонентами суммы

$$\sum X'\Delta t, \quad \sum Y'\Delta t, \quad \sum Z'\Delta t,$$

имеющие своими пределами приведенные в тексте интегралы, которыми определяются компоненты вектора $\boldsymbol{I}$. (*Ред.*)

77. Если вместо постоянного интервала (t_0, t_1) возьмем интервал (t_0, t), в котором верхний предел t является переменным, то соответствующий интеграл:

$$\boldsymbol{I}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}\,dt, \tag{39}$$

есть вектор, представляющий собой функцию параметра t; эта функция, очевидно, имеет своей производной $\boldsymbol{v}(t)$; иными словами, из соотношения (39) следует:

$$\frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt}=\boldsymbol{v}(t).$$

Если представим себе, что вектор $\boldsymbol{I}(t)$ приложен в постоянной точке O, то свободный конец этого вектора есть точка $P(t)$, также представляющая собою функцию параметра t; эта функция имеет своей производной вектор $\boldsymbol{v}$ (рубр. 68).

78. Определение, данное в рубр. 76, допускает обобщение. Если вектор $\boldsymbol{v}$ представляет собою функцию точек некоторой области C (какой угодно — криволинейной, поверхностной, пространственной), то вектор, имеющий компонентами скалярные интегралы

$$\int_C X\,dC,\quad \int_C Y\,dC,\quad \int_C Z\,dC,$$

обозначается символом

$$\int_C \boldsymbol{v}\,dC$$

и называется интегралом от функции $\boldsymbol{v}$, взятым по области C.

Отметим, что и в этом случае остается в силе формула

$$\int \boldsymbol{v}\,dC=\lim\sum \boldsymbol{v}\,\Delta C,$$

как и в случае области одного измерения (рубр. 71).

11. Диференциальные свойства кривых. Формулы Френе. Круглые винты.

79. Сферическая индикатриса касательных. Положим, что нам дана, как в рубр. 75, некоторая дуга кривой l. Выберем произвольно начало O и каждой точке P этой дуги отнесем другую точку M, радиус-вектор которой $\overline{OM}=\boldsymbol{t}$; иными словами, из точки O проведем вектор, равный единичному касательному вектору $\boldsymbol{t}$ в точке P. Все эти точки M по самому своему построению будут расположены на сфере радиуса 1 с центром в точке O. В своей совокупности они образуют на сфере кривую (или дугу кривой) λ, которая называется *сферической индикатрисой* касательных рассматриваемой кривой l.