77. Если вместо постоянного интервала (t_0, t_1) возьмем интервал (t_0, t), в котором верхний предел t является переменным, то соответствующий интеграл:

$$\boldsymbol{I}(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}\, dt, \tag{39}$$

есть вектор, представляющий собой функцию параметра t; эта функция, очевидно, имеет своей производной $\boldsymbol{v}(t)$; иными словами, из соотношения (39) следует:

$$\frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt} = \boldsymbol{v}(t).$$

Если представим себе, что вектор $\boldsymbol{I}(t)$ приложен в постоянной точке O, то свободный конец этого вектора есть точка $P(t)$, также представляющая собою функцию параметра t; эта функция имеет своей производной вектор $\boldsymbol{v}$ (рубр. 68).

78. Определение, данное в рубр. 76, допускает обобщение. Если вектор $\boldsymbol{v}$ представляет собою функцию точек некоторой области C (какой угодно — криволинейной, поверхностной, пространственной), то вектор, имеющий компонентами скалярные интегралы

$$\int_C X\, dC, \quad \int_C Y\, dC, \quad \int_C Z\, dC,$$

обозначается символом

$$\int_C \boldsymbol{v}\, dC$$

и называется интегралом от функции $\boldsymbol{v}$, взятым по области C.

Отметим, что и в этом случае остается в силе формула

$$\int \boldsymbol{v}\, dC = \lim \sum \boldsymbol{v}\, \Delta C,$$

как и в случае области одного измерения (рубр. 71).

11. Диференциальные свойства кривых. Формулы Френе. Круглые винты.

79. **Сферическая индикатриса касательных.** Положим, что нам дана, как в рубр. 75, некоторая дуга кривой l. Выберем произвольно начало O и каждой точке P этой дуги отнесем другую точку M, радиус-вектор которой $\overline{OM} = \boldsymbol{t}$; иными словами, из точки O проведем вектор, равный единичному касательному вектору $\boldsymbol{t}$ в точке P. Все эти точки M по самому своему построению будут расположены на сфере радиуса 1 с центром в точке O. В своей совокупности они образуют на сфере кривую (или дугу кривой) λ, которая называется *сферической индикатрисой* касательных рассматриваемой кривой l.

Если кривая l содержит как часть прямолинейный отрезок, то на всем его протяжении касательный вектор $\boldsymbol{t}$ имеет одно и то же направление; поэтому все точки M, соответствующие точкам такого отрезка, совпадают; иными словами, индикатриса прямолинейного отрезка вырождается в точку. Но если l есть действительная кривая, то вектор $\boldsymbol{t}$ меняется непрерывно, и точка M описывает на сфере действительную кривую λ. Если l есть плоская кривая, то таковой будет и индикатриса λ; ее плоскость параллельна плоскости кривой l; в самом деле, все касательные кривой l в рассматриваемом случае принадлежат плоскости этой кривой; все векторы $\boldsymbol{t}$, будучи перенесены в точку O, будут расположены в одной и той же плоскости, параллельной плоскости кривой l.

Сосредоточим теперь внимание на таком участке кривой l, где она представляет действительно кривую, где, следовательно, вектор $\boldsymbol{t}$ не остается постоянным; он представляет собой функцию длины дуги s нашей кривой; мы будем предполагать, что эта функция конечна, непрерывна и допускает требуемые исследованием производные.

80. Под *углом смежности*, соответствующим дуге PP_1 кривой l, разумеют угол, составленный касательными $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{t}_1$ в точках P и P_1 (предполагая, конечно, что они обращены в сторону, присвоенную самой кривой). Этот угол хорошо выявляется сферической индикатрисой. В самом деле, если M и M_1 суть изображения точек P и P_1 (концы векторов $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{t}_1$, перенесенных в точку O), то дуга χ большого круга, соединяющая на сфере изображения точки M и M_1, очевидно, измеряет (в радианах) угол касания. Она, таким образом, характеризует отклонение кривой l от прямолинейного хода на протяжении дуги PP_1. В соответствии с этим отклонение, отнесенное к единице длины дуги $PP_1 = |\Delta s|$, т. е. отношение

$$\frac{\chi}{|\Delta s|}, \tag{40}$$

называется средней кривизной дуги PP_1. Обратное отношение называется *средним радиусом кривизны* той же дуги; это, очевидно, радиус дуги круга, имеющей при длине $|\Delta s|$ угол касания, а следовательно, и угол при центре, равный χ. Окружность, таким образом, принимается здесь за типичную кривую, при помощи которой придается наглядность понятию о радиусе кривизны.

Предел, к которому стремится средняя кривизна дуги PP_1 (40), когда точка P_1 стремится к P, т. е. когда $\Delta s \to 0$, называется *кривизной* кривой l в точке P. Легко убедиться, что этот предел всегда существует, если только вектор $\boldsymbol{t}$ имеет производную по s; легко также найти для него довольно простое выражение.

В самом деле, по построению

$$\overline{OM}=t, \quad \overline{OM}=t_1,$$

поэтому разность $\Delta t = t_1 - t$ выражается вектором $\overline{MM_1}$, а длина хорды MM_1 совпадает с длиной $|\Delta t|$ вектора Δt. С другой стороны, предел отношения дуги большого круга χ к соответствующей хорде MM_1 равен 1. Так как при этом

$$\frac{\chi}{|\Delta s|}=\frac{|\Delta t|}{|\Delta s|}\cdot\frac{\chi}{|\Delta t|}=\left|\frac{\Delta t}{\Delta s}\right|\cdot\frac{\chi}{|\Delta t|},$$

то *предел отношения* $\frac{\chi}{|\Delta s|}$ *равен длине вектора* $\frac{dt}{ds}$. Если поэтому обозначим через c кривизну кривой l в точке P, то

$$c=\left|\frac{dt}{ds}\right|. \tag{41}$$

Так как c, как предел количества существенно положительного, по самому своему определению, $\geqslant 0$, то соотношение (41) эквивалентно равенству

$$c^2=\left(\frac{dt}{ds}\right)^2. \tag{41'}$$

Мы выше уже приняли (рубр. 79), что речь идет не о прямой, а о действительной кривой линии; мы можем поэтому исключить предположение, что на всей рассматриваемой кривой $\frac{dt}{ds}=0$. Вместе с тем мы можем выделить точку, а с нею, в силу непрерывности векторной функции $\frac{dt}{ds}$, и окружающий эту точку интервал, в котором производная $\frac{dt}{ds}$ не обращается в нуль. В этом предположении c наверное больше нуля, а потому в каждой точке такого интервала имеет конечное значение также *радиус кривизны в точке* P:

$$r=\frac{1}{c}. \tag{42}$$

С другой стороны, так как t есть единичный вектор, то его производная $\frac{dt}{ds}$ имеет направление, к нему перпендикулярное (рубр. 62), а потому представляет собою вектор, нормальный к кривой l в точке P. Прямая, проходящая через точку P в направлении вектора $\frac{dt}{ds}$ и обращенная в ту же сторону, что и вектор $\frac{dt}{ds}$, называется *главной нормалью кривой* l в точке P. В случае плоской кривой главная нормаль всегда расположена в ее плоскости; в самом деле, в этом случае вектор t все время остается в плоскости кривой, а вместе с ним и его производная $\frac{dt}{ds}$.

Мы будем обычно обозначать через n версор вектора $\frac{dt}{ds}$, т. е. единичный вектор, который имеет направление и сторону обращения главной нормали. Так как длина вектора $\frac{dt}{ds}$ равна c, то

$$\frac{dt}{ds} = cn = \frac{1}{r}\,n. \tag{43}$$

Полезно отметить, что при изменении стороны обращения кривой l (т. е. стороны, в которую обращены дуги с положительным численным значением s) ds меняется на $-ds$, меняет сторону обращения вектор $t = \frac{dP}{ds}$; но вектор n не изменяется: в самом деле, он определяется вектором $\frac{dt}{ds}$, который сохраняет свое значение, ибо t и ds меняют знаки на обратные.

81. Соприкасающейся плоскостью кривой l в точке P называется плоскость, проходящая через точку P и через приложенные к ней векторы t и n. В случае плоской кривой она совпадает с ее плоскостью, но в случае так называемых кривых двоякой кривизны (см. ниже) она меняется от точки к точке В смежности с точкой P ее соприкасающаяся плоскость обладает свойством наибольшего приближения к кривой, откуда и проистекает ее название. Точнее, это свойство выражается следующим образом: *из всех плоскостей π, проходящих через точку P кривой l, соприкасающаяся плоскость в окрестности точки P наименее удаляется от кривой.*

Чтобы это доказать, возьмем произвольную точку P_1, весьма близкую к P_2, и прежде всего вычислим ее расстояние от произвольной плоскости π, проходящей через P. С этой целью обозначим через Q_1 проекцию точки P_1 на плоскость π и заметим, что отрезок P_1Q_1 можно рассматривать как проекцию хорды на нормаль к плоскости π. Если поэтому обозначим через v единичный вектор, параллельный этой нормали (обращенный в ту или другую сторону — все равно), то

$$P_1Q_1 = |\overline{PP}_1\, v|.$$

С другой стороны, поскольку точка P_1 весьма близка к P, разность $\Delta s = s_1 - s$ криволинейных абсцисс точек P и P_1 можно считать бесконечно малой. Если рассматривать точку P как функцию от s, т. е. положить $P = P(s)$, то $P_1 = P(s + \Delta s)$; поэтому формула Тэйлора (46), если положить в ней

$$t = s, \quad t_1 = s_1, \quad s_1 - s = \Delta s, \quad \dot{P} = \frac{dP}{ds} = t, \quad \ddot{P} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{r}\,n,$$

дает:

$$\overline{PP}_1 = \Delta P = \Delta s t + \frac{1}{2r}\Delta s^2 (n + \bar{\varepsilon}); \tag{44}$$

отсюда мы получаем для расстояния P_1Q_1, не учитывая знака, следующее выражение:

$$\Delta s\,(tv + \frac{1}{2r}\Delta s^2 (nv) + \frac{1}{2}\Delta s^2\,(\bar{\varepsilon} v).$$

Оно состоит, как мы видим, из трех членов: первый представляет собой относительно Δs бесконечно-малую первого порядка, если только скалярное произведение tv не обращается в нуль; второй представляет собою бесконечно-малую второго порядка, если не обращается в нуль скалярное произведение nv; наконец, третий член во всяком случае представляет собою бесконечно-малую порядка выше второго, так как он содержит множителем помимо Δs^2 еще вектор $\bar{\varepsilon}$, который стремится к нулю вместе с Δs (рубр. 74). Чтобы расстояние P_1Q_1 стало для всех точек P_1 кривой l, весьма близких к P, сколько возможно малым, нужно, очевидно, стараться уничтожить слагаемые, имеющие, так сказать, преобладающее значение, т. е. слагаемые первого и второго порядка. Для этого необходимо и достаточно, чтобы обратились в нуль скалярные произведения tv и nv, т. е. чтобы вектор v был перпендикулярен к векторам n и t; а это означает, что плоскость π должна проходить через векторы t и n, приложенные в точке P, т. е. должна совпадать с плоскостью π.

82. Легко видеть, что соприкасающяся плоскость обладает и другими свойствами, которые могут служить для ее определения. Так, например, если возьмем плоскость, проходящую через точку P и содержащую как касательную t, так и направление касательной t_1 в точке P_1, весьма близкой к P, а затем станем приближать точку P_1 к P, то рассматриваемая плоскость будет стремиться к соприкасающейся плоскости π. Чтобы в этом убедиться, достаточно принять во внимание, что плоскость, содержащая направления векторов t и t_1, содержит также направление вектора $\Delta t = t_1 - t$, а потому и направление вектора $\frac{\Delta t}{\Delta s}$. В пределе она станет поэтому параллельной векторам t и $\frac{dt}{ds}$, а потому неизбежно совпадет с соприкасающейся плоскостью в точке P.

Аналогично можно доказать, что соприкасающяся плоскость может быть также рассматриваема, как предельное положение плоскостей, проходящих через t и смежную точку кривой P_1 (конечно, когда P_1 стремится к P); наконец, π есть также предельное положение плоскостей, проходящих через три точки кривой P_1, P_2, P_3, когда последние все стремятся к совпадению с P.

83. **Главный триэдр.** Перпендикуляр к соприкасающейся плоскости, ориентированный таким образом, чтобы он составил с направлениями t и n правосторонний триэдр (трижды ортогональный), называется *бинормалью* кривой в точке P. Если соответствующий единичный вектор (версор) обозначим через b, то триэдр tnb, составленный векторами t, n и b, выходящими из точки P, называется *главным триэдром* кривой в точке P. Из самого определения векторного произведения следует, что

$$b = [tn], \quad t = [nb], \quad n = [bt].$$

Из трех граней этого триэдра, одна (t, n) представляет собой соприкасающуюся плоскость; другую (n, b) образует *нормальная плоскость* к кривой в точке P; наконец, третья (b, t), т. е. плоскость, определяемая касательной и бинормалью к кривой, называется *спрямляющей плоскостью*. Основанием для такого названия служит то обстоятельство, что в ближайшей окрестности точки P проекцией кривой на эту плоскость является прямая, по крайней мере, если пренебречь бесконечно-малыми порядка выше второго; этой проекцией служит сама касательная t. Мы легко дадим себе в этом отчет, припомнив (рубр. 81), что кривая l вблизи точки P лежит в соприкасающейся плоскости (t, n), если не считать бесконечно малых отклонений порядка выше второго. Поэтому ее проекция на перпендикулярную плоскость (b, t) совпадает с линией пересечения обеих плоскостей, т. е. с касательной t в точке P.

Отметим еще, что в ближайшей окрестности точки P кривая целиком расположена с той стороны спрямляющей плоскости (b, t), в которую обращена главная нормаль n; иными словами, кривая повернута своей вогнутостью в сторону главной нормали. Чтобы это доказать, очевидно, достаточно констатировать, что для точки P_1, весьма близкой к P, вектор $\overline{PP_1}$ образует с версором главной нормали n острый угол, т. е. что скалярное произведение $\overline{PP_1}\, n$ имеет положительное значение. Но из соотношения (44) мы видим, что

$$\overline{PP_1}\, n = \Delta s \cdot tn + \frac{1}{2r} \Delta s^2 (n^2 + \bar{\varepsilon} n) = \frac{1}{2r} \Delta s^2 (1 + \bar{\varepsilon} n).$$

Так как вектор $\bar{\varepsilon}$ бесконечно мал (при бесконечно малом Δs), то для достаточно малых значений Δs единица в правой части превысит скалярное произведение $\bar{\varepsilon} n$, а потому все выражение получит положительное значение.

84. Производная вектора b. Этот единичный вектор, по определению, перпендикулярен к t и n; поэтому для плоской кривой, соприкасающаяся плоскость которой во всех точках совпадает с плоскостью кривой (рубр. 81), вектор b остается постоянным. Но вообще вектор b меняется от точки к точке, т. е. он представляет собою функцию от s, как и векторы t и n. Однако во всяком случае

$$b^2 = 1, \quad bt = 0.$$

Диференцируя эти равенства, получаем:

$$b \frac{db}{ds} = 0 \qquad \frac{db}{ds}\, t + b \frac{dt}{ds} = 0.$$

Первое из этих равенств обнаруживает, что вектор $\frac{db}{ds}$ перпендикулярен к b (как это уже было показано для всякого единичного вектора, рубр. 68); во втором же равенстве, ввиду соотношения (43), второе слагаемое левой части равно нулю; поэтому обращается в нуль также скалярное произведение $\frac{db}{ds}\, t$, т. е. вектор $\frac{db}{ds}$ перпендикулярен к t. Иными словами, вектор $\frac{db}{ds}$ одновременно перпендикулярен к векторам b и t, т. е. он параллелен вектору n. Таким образом мы во всех случаях можем положить:

$$\frac{db}{ds} = \tau n, \qquad (45)$$

где τ есть число положительное, отрицательное или нуль.

85. Вторая кривизна или кручение кривой. Это число τ называется *второй кривизной или кручением* кривой в рассматриваемой точке P.

Случай $\tau = 0$ имеет место для плоских кривых, ибо для них вектор b, как уже было указано в предыдущей рубрике, сохраняет постоянное значение, а потому его производная равна нулю на всем протяжении кривой. Если же τ отлично от нуля, то его абсолютное значение дает наглядную меру отклонения кривой в рассматриваемой ее точке от плоского расположения. Чтобы это обнаружить, рассмотрим две произвольные точки P и P_1 кривой l. Изменение ориентации соприкасающейся плоскости при переходе от точки P к P_1 характеризуется углом θ этих двух плоскостей или, что то же, углом между нормалями к ним, т. е. между бинормалями кривой в точках P и P_1, или, наконец, между векторами b и b_1. Однако, чтобы характеризовать скорость, с которой изменяется соприкасающаяся плоскость вдоль кривой, нужно принять во внимание не только угол θ, но и длину $|\Delta s|$ дуги, содержащейся между точками, которые дают место этому угловому отклонению. Но отношение

$$\frac{\theta}{|\Delta s|},$$

приводящее это отклонение к единице пройденной дуги, делает сравнимым ход этого отклонения в различных точках кривой.

В непосредственной близости к точке P, с этой точки зрения, численной характеристикой изменения положения соприкасающейся плоскости служит предел отношения $\frac{\theta}{|\Delta s|}$, когда Δs стремится к нулю. Если представим себе сферическую индикатрису, которую чертит вектор b подобно индикатрисе касательных, рассмотренных в рубр. 79, то совершенно аналогичное рассуждение приведет нас к заключению, что предел приведенного отношения равен длине вектора $\frac{db}{ds}$ или, ввиду соотношения (45), абсолютному значению числа τ.

Но и знак числа τ, естественно, соответствует некоторой геометрической особенности в ходе кривой вблизи точки P. Мы дадим себе в этом ниже отчет помощью очень простого рассуждения. Здесь же заметим, что в соответствии с понятием о радиусе кривизны r кривой в данной ее точке P, представляющем величину, обратную кривизне c, вводят также понятие о *радиусе второй кривизны* T, полагая

$$T=\frac{1}{\tau}. \tag{46}$$

Но в отличие от радиуса первой кривизны, который всегда имеет положительное значение, радиус второй кривизны может от случая к случаю иметь то положительное, то отрицательное значение. Вводя в формулу (45) T вместо τ, мы можем последнюю написать в виде:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{1}{T}\boldsymbol{n}. \tag{46'}$$

86. Формулы Френе[1]. Во многих вопросах, относящихся к исследованию кривых, имеют очень важное значение производные трех векторов $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$, образующих основной триэдр. Для первого и третьего векторов мы уже получили весьма простые выражения (43) и (45) их производных, которые помимо самих векторов содержат еще только первую и вторую кривизну. Эти формулы легко дополнить аналогичным выражением для производной $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$. Достаточно взять вектор $\boldsymbol{n}$ в форме $[\boldsymbol{bt}]$ (рубр. 83) и это выражение непосредственно диференцировать. Мы получим:

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\left[\boldsymbol{b}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right]+\left[\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\boldsymbol{t}\right].$$

Заменяя здесь производные $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ и $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ их выражениями (43) и (45) и имея, далее, в виду, что (рубр. 83)

$$[\boldsymbol{bn}]=-\boldsymbol{t} \text{ и } [\boldsymbol{nt}]=-\boldsymbol{b},$$

получим:

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-c\boldsymbol{t}-\tau\boldsymbol{b}.$$

Сопоставляя их с выражениями производных от $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{b}$, мы получим формулы Френе:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}&=c\,\boldsymbol{n},\\ \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}&=-c\boldsymbol{t}-\tau\,\boldsymbol{b},\\ \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}&=\tau\,\boldsymbol{n}.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Они были даны Френе, но не в векторных обозначениях, которые получили широкое распространение только в последние десятилетия.

---

[1] *Жан Френе* (Jean Frédéric Frenet), французский геометр, родился в г. Перигё (Perigeux Dordogne) в 1816 г., умер там же в 1900 г., был профессором Лионского университета. Формулы, носящие его имя, были им установлены в 1847 г. и опубликованы в 1852 г. в журнале „Journal de mathématiques pures et appliquées“.

87. Знак второй кривизны. Мы видели выше (рубр. 81), что кривая в окрестности какой-нибудь точки P удаляется от соприкасающейся плоскости в точке P на расстояния, представляющие собою бесконечно-малые порядка выше второго. Чтобы поэтому сделать оценку этого удаления, не следует ограничиваться бесконечно-малыми второго порядка; необходимо принять в расчет еще непосредственно следующий член. Возвратимся поэтому к разложению Тэйлора, которым мы уже пользовались в рубр. 81, и выразим $P_1 = P(s + \Delta s)$ через $P(s)$ и производные этой функции до третьего порядка включительно. Мы получим:

$$\Delta P = \overline{PP_1} = \Delta s\, \dot{P} + \frac{1}{2}\Delta s^2\, \ddot{P} + \frac{1}{6}\,\Delta s^3 \{\dddot{P} + \bar{\varepsilon}\},$$

где вектор $\bar{\varepsilon}$ имеет, как обычно, бесконечно малое значение. Как и в рубр. 81, сделаем подстановки:

$$\dot{P} = t, \quad \ddot{P} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{r}\,n,$$

а вместе с тем, следовательно,

$$\dddot{P} = \frac{d}{ds}\,(c\,n).$$

Выполняя здесь диференцирование и пользуясь последней формулой Френе [т. е. вторым из соотношений (47)], найдем:

$$\dddot{P} = \frac{dc}{ds}\,n - c\,(ct + \tau\, b),$$

откуда

$$\dddot{P}b = -c\tau.$$

Имея это в виду, умножим вектор $\overline{PP_1}$, скалярно на b; мы получим:

$$\overline{PP_1}\, b = -\frac{1}{6}\,\Delta s^3\,(c\,\tau - \bar{\varepsilon} b).$$

Мы, конечно, можем оставить в стороне плоские кривые и соответственно этому считать не только первую кривизну C, но и вторую τ отличными от нуля. При этих условиях член $c\tau$ для достаточно малых значений вектора $\bar{\varepsilon}$, несомненно, превысит (конечно, по абсолютной величине) скалярное произведение $\bar{\varepsilon} b$; вместе с тем знак скалярного произведения $\overline{PP_1}\ b$ совпадет со знаком произведения

$$-\frac{1}{6}\,\Delta s^3 c\,\tau,$$

который, в свою очередь, совпадает со знаком произведения $-\Delta s\tau$ (так как $\frac{1}{6}\Delta s^2 c$ есть число существенно положительное).

С другой стороны, знак скалярного произведения $\overline{PP_1}\ b$ определяет, находится ли точка P_1 с положительной стороны соприкасающейся плоскости или с отрицательной, если считать положительной ту, в которую обращен вектор b. Но знак этот, как показывает найденное выражение, изменяется вместе со знаком Δs. Отсюда первый вывод: кривая в точке P *пересекает* соприкасающуюся плоскость. Но в какую сторону? Чтобы это выяснить, проследим за ходом кривой вблизи P, пробегая ее в положительную ее сторону; тогда Δs до P будет иметь отрицательное значение, обратится в нуль в точке P и затем примет положительное значение.

Теперь ясно, что *при* $\tau > 0$ *кривая переходит с положительной стороны соприкасающейся плоскости на отрицательную* (так как $-\Delta s\tau$ в этом случае имеет знак, противоположный Δs), *а при* $\tau < 0$ *она направлена в обратную сторону.*

Следует отметить, что этот вывод имеет внутренний характер, так как он не зависит от стороны, в которую направление кривой считается положительным. В самом деле, если сторона обращения кривой меняется на противоположную, то вектор $\boldsymbol{n}$, как мы уже видели, по самому своему определению остается неизменным, вектор же $\boldsymbol{b}$ меняет сторону обращения на противоположную вместе с $\boldsymbol{t}$, так как триэдр $\boldsymbol{tnb}$ должен оставаться правосторонним. Мы имеем теперь возможность нагляднее выразить полученный результат. Представим себе наблюдателя, стоящего в точке P по направлению $\boldsymbol{t}$ и обращенного лицом к вектору $\boldsymbol{n}$; ($\boldsymbol{b}$, следовательно, остается слева от наблюдателя); по отношению к нему кривая в положительном своем направлении (первоначально произвольном), совпадающем со стороной обращения вектора $\boldsymbol{t}$, поднимается и в то же время проходит слева направо (сторона, противоположная обращению вектора $\boldsymbol{b}$), если τ имеет положительное значение; в противоположном случае она идет справа налево. Можно, таким образом, сказать, что *знак второй кривизны вскрывает, имеет ли кривая в этой точке левосторонний ход* ($\tau > 0$) *или правосторонний*($\tau < 0$).

88. **Круглые винты.** Под этим названием разумеют, как известно, кривые, проходящие на поверхности круглого цилиндра таким образом, что пересекают все образующие под постоянным углом. Если развернуть цилиндрическую поверхность на плоскость, то каждая винтовая линия, в силу вышеприведенного ее свойства, непременно расположится по прямой линии. Вследствие этого винтовые линии имеют и другое характеризующее их свойство, заключающееся в том, что дуга винта представляет на цилиндрической поверхности кратчайшее расстояние между двумя ее точками (*геодезическая* линия поверхности); в самом деле, при развертывании цилиндрической поверхности длины кривых не изменяются; вследствие этого высказанное утверждение вытекает из того факта, что винтовая линия развертывается по прямой.

Пусть теперь l будет винт, начерченный на круглом цилиндре радиуса R. На образующих цилиндра установим общую сторону их обращения и обозначим через $\boldsymbol{k}$ соответствующий версор (единичный вектор). Предположим далее, что мы имеем дело с *невыродившимся* винтом, т. е. что (наименьший) угол ϑ, который кривая на всем своем протяжении образует с вектором $\boldsymbol{k}$, не равен ни нулю (в каковом случае винт вырождается в прямую), ни $\frac{\pi}{2}$ (в каковом случае винт вырождается в окружность — в нормальное сечение цилиндра). В соответствии с этим мы можем выбрать за сторону возрастающих длин s (за сторону положительного обращения кривой) ту, которая дает названный угол ϑ $\left(0<\vartheta<\frac{\pi}{2}\right)$.

Положительная сторона винта определяет также сторону вращения вокруг оси цилиндра. Это вращение относительно вектора $\boldsymbol{k}$, приложенного на оси цилиндра, представится правосторонним или левосторонним. В соответствии с этим отличают *правосторонние* и *левосторонние* (короче, *правые* и *левые*) винты.

Вряд ли необходимо указывать, что подразделение винтов носит внутренний характер, т. е. что оно не зависит от стороны, которую мы принимаем за положительную на оси цилиндра. В самом деле, если мы обратим вектор $\boldsymbol{k}$, то вместе с этим обратится в противоположную сторону кривая l, а потому правосторонний или левосторонний характер кривой останется неизмененным.

89. Векторы $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{n}$ круглого винта и его кривизна. Согласно предыдущей рубрике, компонента $\boldsymbol{tk}$ вектора $\boldsymbol{t}$ в направлении $\boldsymbol{k}$ равна $\cos\vartheta$. Разность

$$\boldsymbol{t}-\cos\vartheta\boldsymbol{k}$$

представляет поэтому компоненту вектора $\boldsymbol{t}$ на плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{k}$. Этому можно придать более наглядности, если представить себе пересечение этой плоскости с цилиндрической поверхностью; обозначим через l^* окружность сечения. На плоскость сечения винтовая линия l проектируется образующими цилиндрической поверхности; проекция совпадает поэтому с окружностью l^*. Векторы $\boldsymbol{t}$ дают проекции, касательные к окружности l^*, но длина проекции равна не 1, а $\sin\vartheta$ (так как острый угол между вектором $\boldsymbol{t}$ и плоскостью сечения равен $\frac{\pi}{2}-\vartheta$). Отсюда следует, что можно вектор

$$\boldsymbol{t}^*=\frac{\boldsymbol{t}-\cos\vartheta\boldsymbol{k}}{\sin\vartheta}$$

рассматривать как единичный касательный вектор к окружности l^* в точке P^*, представляющей проекцию точки P кривой l.

Далее, элемент длины ds^* окружности l^* можно также рассматривать как проекцию элемента ds дуги винта l; поэтому

$$ds^*=ds\sin\vartheta.$$

Диференцируя поэтому предыдущее равенство и имея в виду, что ϑ и $\boldsymbol{k}$ суть постоянные, получаем:

$$\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds^*}=\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}.$$

Эта формула устанавливает как главную нормаль к винтовой линии, так и ее первую кривизну. В самом деле, обозначим через $\boldsymbol{N}$ единичный вектор нормали к цилиндру, направленной к оси. Если припомним, что кривизна окружности радиуса R равна $\frac{1}{R}$, мы тотчас получим по первой из формул Френе (47):

$$\frac{dt^*}{ds^*} = \frac{1}{R}\boldsymbol{N}.$$

Вместе с тем предыдущее соотношение принимает вид:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\sin^2\vartheta}{R}\boldsymbol{N}.$$

Сопоставляя это соотношение с первой формулой Френе, мы приходим к следующему выражению:

$$\frac{1}{r}\boldsymbol{n} = \frac{\sin^2\vartheta}{R}\boldsymbol{N}.$$

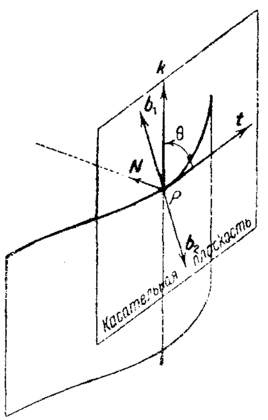
Итак:

1) *Главная нормаль к винтовой линии в любой ее точке совпадает с нормалью к цилиндрической поверхности и обращена к оси цилиндра.*

2) *Первая кривизна имеет во всех точках кривой одно и то же значение* $\frac{\sin^2\vartheta}{R}$, *а потому соответствующий радиус кривизны равен* $\frac{R}{\sin^2\vartheta}$.

90. Вектор $\boldsymbol{b}$ и вторая кривизна. По определению:

$$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}].$$



Фиг. 29.

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае вектор $\boldsymbol{b}$ перпендикулярен к $\boldsymbol{N}$, т. е. лежит в касательной плоскости к цилиндрической поверхности в точке P, а в ней он направлен перпендикулярно к $\boldsymbol{t}$. Остается установить сторону его обращения; желательно привести это в связь с направлением образующей цилиндра в точке P (которая целиком расположена в касательной плоскости в точке P), а еще лучше с единичным вектором $\boldsymbol{k}$. Наша задача заключается, таким образом, в том, чтобы выяснить, образует ли вектор $\boldsymbol{b}$ с $\boldsymbol{k}$ острый или тупой угол: этим устанавливается сторона обращения вектора $\boldsymbol{b}$; на фиг 29 вектор $\boldsymbol{b}$ обращен в сторону b_1, если $\widehat{bk} < \frac{\pi}{2}$, и в сторону b_2, если $\widehat{bk} > \frac{\pi}{2}$. При этом легко видеть, что угол $\widehat{bk}$ будет острым или тупым, смотря по тому, имеем ли мы дело с правосторонним или левосторонним винтом.

Так как $kt = \cos\vartheta$ (см. предыдущую рубрику), то вследствие перпендикулярности векторов t и b

$$kb = \pm \sin\vartheta.$$

Соответственно тому, что было сейчас указано, верхний знак имеет место в случае правостороннего, а нижний в случае левостороннего винта. Диференцируя по s оба соотношения:

$$kt = \cos\vartheta, \quad kb = \pm\sin\vartheta \tag{48}$$

и пользуясь формулами Френе, получим:

$$kn = 0, \quad k(ct + \tau b) = 0.$$

Последнее же в силу тех же соотношений (48) дает:

$$c\cos\vartheta \pm \tau\sin\vartheta = 0.$$

Подставляя сюда вместо c его значение $\frac{\sin^2\vartheta}{R}$ и определяя τ, получим:

$$\tau = \mp \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{R}. \tag{49}$$

Таково выражение для второй кривизны, в котором должен быть взят верхний знак для правостороннего, а нижний для левостороннего винта. Ясно, что она имеет постоянное значение во всех точках винта. Отсюда, в частности, следует, что установленные знаки второй кривизны вполне соответствуют правилу, данному в рубр. 87 для определения знака второй кривизны на любой кривой.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Длина суммы R нескольких векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ определяется формулой:

$$R^2 = \sum_{1}^{n}{}_k v_k^2 + 2\sum_{ij} v_i v_j \cos\widehat{v_i v_j},$$

где суммование во втором члене правой части распространяется на все возможные сочетания индексов 1, 2, ..., n по два.

2. Для каких угодно трех векторов a, b, c имеет место тождество:

$$\left[a\,[bc]\right] + \left[b\,[ca]\right] + \left[c\,[ab]\right] = 0.$$

3. Пусть a, b, c будут три некомпланарные вектора. Произвольный вектор v, как известно, можно разложить по прямым действия этих трех векторов; так что

$$v = \lambda a + \mu b + \nu c,$$

где λ, μ, ν — вполне определенные численные коэфициенты.