в сторону b_2, если $\widehat{bk} > \frac{\pi}{2}$. При этом легко видеть, что угол $\widehat{bk}$ будет острым или тупым, смотря по тому, имеем ли мы дело с правосторонним или левосторонним винтом.

Так как $kt = \cos\vartheta$ (см. предыдущую рубрику), то вследствие перпендикулярности векторов t и b

$$kb = \pm \sin\vartheta.$$

Соответственно тому, что было сейчас указано, верхний знак имеет место в случае правостороннего, а нижний в случае левостороннего винта. Диференцируя по s оба соотношения:

$$kt = \cos\vartheta, \quad kb = \pm\sin\vartheta \tag{48}$$

и пользуясь формулами Френе, получим:

$$kn = 0, \quad k(ct + \tau b) = 0.$$

Последнее же в силу тех же соотношений (48) дает:

$$c\cos\vartheta \pm \tau\sin\vartheta = 0.$$

Подставляя сюда вместо c его значение $\frac{\sin^2\vartheta}{R}$ и определяя τ, получим:

$$\tau = \mp \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{R}. \tag{49}$$

Таково выражение для второй кривизны, в котором должен быть взят верхний знак для правостороннего, а нижний для левостороннего винта. Ясно, что она имеет постоянное значение во всех точках винта. Отсюда, в частности, следует, что установленные знаки второй кривизны вполне соответствуют правилу, данному в рубр. 87 для определения знака второй кривизны на любой кривой.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Длина суммы R нескольких векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ определяется формулой:

$$R^2 = \sum_{1}^{n}{}_k v_k^2 + 2\sum_{ij} v_i v_j \cos\widehat{v_i v_j},$$

где суммование во втором члене правой части распространяется на все возможные сочетания индексов 1, 2, ..., n по два.

2. Для каких угодно трех векторов a, b, c имеет место тождество:

$$\Big[a\,[bc]\Big] + \Big[b\,[ca]\Big] + \Big[c\,[ab]\Big] = 0.$$

3. Пусть a, b, c будут три некомпланарные вектора. Произвольный вектор v, как известно, можно разложить по прямым действия этих трех векторов; так что

$$v = \lambda a + \mu b + \nu c,$$

где λ, μ, ν — вполне определенные численные коэфициенты.

Показать, что
$$\lambda = \frac{v\,[bc]}{a\,[bc]},$$
выражения же для μ и ν получаются отсюда путем круговых перемещений векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

4. Обозначим через M момент приложенного вектора $\boldsymbol{v}$ относительно точки P, а через Q основание перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую действия вектора $\boldsymbol{v}$. Показать, что
$$\overline{PQ} = \frac{1}{v^2}[vM].$$

5. Каждому вектору $\boldsymbol{v} = Xi + Yi$ плоскости Oxy отнесем комплексное число
$$z = X + iY \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Показать, что векторное умножение вектора $\boldsymbol{k}$ на вектор $\boldsymbol{v}$ эквивалентно умножению числа z на i.

Замечание. В этом упражнении установлено одноодиозначное соответствие между векторами плоскости и комплексными числами; показано, что умножение комплексного числа на мнимую единицу i эквивалентно умножению соответствующего вектора (слева) на версор $\boldsymbol{k}$, т. е. повороту на 90°. Аналогично этому всякая аналитическая операция $f(z)$, применение которой к комплексному числу z дает в результате число z_1, может быть рассматриваема как оператор над векторами плоскости, относящий вектору z вектор z_1.

6. Показать, что умножение комплексного числа на $e^{\vartheta i}$ интерпретируется как поворот соответствующего вектора на угол ϑ.

7. Показать, что геометрическое место точки P, определяемое уравнением
$$\overline{OP} = re^{\vartheta i},$$
где O есть постоянная точка, r — постоянное положительное число, а аргумент ϑ меняется от 0 до 2π, есть окружность, имеющая центр в точке O и радиус r.

Доказать также более общее предложение: если $\rho = \rho(\vartheta)$ есть уравнение некоторой кривой в полярных координатах, то геометрическое уравнение:
$$\overline{OP} = \rho\, e^{\vartheta i}$$
дает параметрическое выражение той же кривой.

8. Показать, что для всех точек, принадлежащих поверхности цилиндра, осью которого служит центральная ось системы приложенных векторов, главный момент системы всегда лежит в касательной плоскости к цилиндру, имеет постоянную длину и образует с осью постоянный угол.

9. Показать, что для системы векторов, инвариантный трехчлен которой отличен от нуля, всегда можно найти центры приведения, по отношению к которым главный момент имеет заданное направление; геометрическое место этих точек есть прямая, параллельная центральной оси системы.

10. *Клаузиус*[1]) называет вириалом системы Σ приложенных векторов $[A_i, v_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)]$ относительно произвольной точки P скаляр
$$V = \sum_{1}^{n}{}_i\, \overline{PA_i}\, v_i.$$

---

[1]) Рудольф Клаузиус (Rudolf Clausius) родился в Кеслине, в Померании, в 1822 г., умер в Бонне в 1888 г., был профессором физики в университетах Цюриха, Вюрцбурга и Бонна. Классическое значение имеют его исследования в области механической теории теплоты, а также в области термодинамики в наиболее широком ее понимании; эти сочинения составляют два тома. Его формулировка основных законов электродинамики в свое время также привлекла внимание исследователей.

Когда полюс P меняется, то закон изменения вириала остается тот же, что и для главного момента (рубр. **39**), с тою лишь разницей, что векторное произведение заменяется скалярным. Таким образом для любого другого полюса P' имеем:

$$V' = \sum_{1}^{n}{}_i \overline{P'A}_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{1}^{n}{}_i \left\{ \overline{PA}_i + \overline{P'P} \right\} \boldsymbol{v}_i = V + \overline{P'P}\, \boldsymbol{R};$$

или в словах: новый вириал равен первоначальному, увеличенному на вириал относительно нового полюса главного вектора системы, приложенного в первоначальном полюсе.

В частности, при $\boldsymbol{R} = 0$, $V' = V$; это значит, для системы, главный вектор которой равен нулю, вириал представляет собою внутренний элемент системы, т. е. не зависит от полюса.

Доказать (например, на основании последнего предложения), что две системы, имеющие общий главный вектор, имеют также общий вириал по отношению к любому полюсу, если их вириалы совпадают при одном определенном полюсе.

11. Показать, что четыре вектора $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$, приложенные в точке P пересечения взаимно перпендикулярных хорд AB и CD некоторой окружности, образуют систему, эквивалентную одному вектору, который приложен в центре окружности O и равен $2\overline{PO}$[1]).

12. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы система векторов была эквивалентна нулю, может быть сведено к тому, чтобы главный ее момент обращался в нуль для трех точек, не расположенных на одной прямой.

13. Любая система векторов эквивалентна двум векторам, из которых один может быть помещен на произвольно выбранной прямой с тем только ограничением, чтобы она не была параллельна главному вектору системы и чтобы взятый относительно нее (осевой) момент системы был отличен от нуля.

14. Абсолютная величина инвариантного трехчлена системы двух векторов равна шестикратному объему тетраэдра, построенного на этих двух векторах и на векторе, соединяющем точки их приложения.

15. Общий перпендикуляр двух векторов встречает под прямым углом центральную ось образуемой ими системы.

16. Всякая система векторов эквивалентна шести векторам, направленным по ребрам произвольно выбранного тетраэдра.

17. Система трех векторов, расположенных в одной плоскости, эквивалентна трем векторам, направленным по сторонам треугольника, произвольно выбранного в той же плоскости.

18. Обобщить на выпуклый многоугольник заключительное замечание рубр. **58**, именно, доказать следующую теорему: плоская система n векторов, перпендикулярных к сторонам выпуклого n-угольника в их серединах, находится в равновесии, если длины векторов пропорциональны соответствующим сторонам и если они все обращены внутрь многоугольника (или все наружу).

19. Система векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра в их центрах (описанных окружностей), находится в равновесии, если длины векторов пропорциональны площадям соответствующих граней и если все они обращены внутрь тетраэдра (или все наружу).

20. На основе определения *вириала*, данного в упражнении **10**, показать, что *центр* системы параллельных приложенных векторов (рубр. **62** и **64**), главный вектор которой отличен от нуля, можно характеризовать как ту точку центральной оси, по отношению к которой вириал обращается в нуль.

Исходя отсюда, можно распространить на любую систему приложенных векторов (т. е., вообще, не параллельных), главный вектор которой отличен от нуля, понятие о *центре* системы; достаточно определить центр как ту точку центральной оси, по отношению к которой вириал обращается в нуль[2]).

Показать, что центр системы этим определяется однозначно.

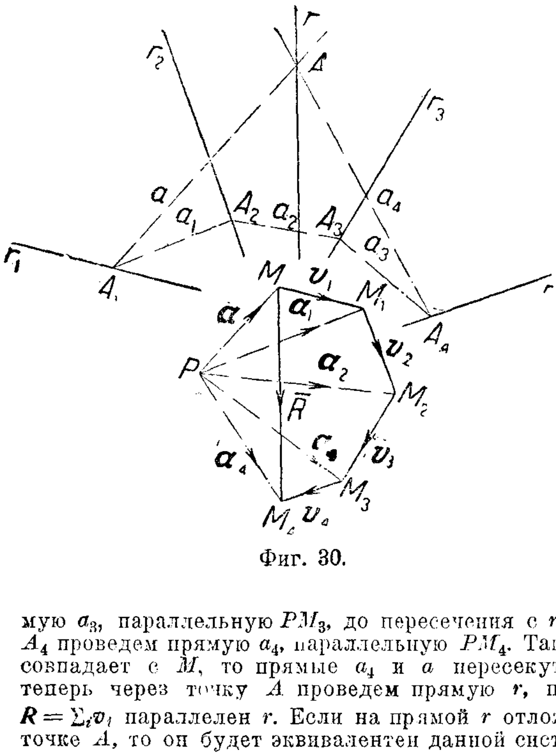
---

[1]) Он может быть приложен и в точке P. (*Ред.*)

[2]) См. *Г. Колосов*, „Comptes Rendus", т. 185, 1928, стр. 1012—1014.

21. Основное построение графической статики[1]). Дана плоская система Σ приложенных векторов; построить (рубр. 57) приложенный вектор или пару, к которым приводится система в зависимости от того, отличен ли ее главный вектор от нуля или равен нулю. В частности, распознать, не уравновешена ли система.

Для простоты рассмотрим систему, состоящую из четырех приложенных векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ (фиг. 30); пусть r_1, r_2, r_3, r_4 будут их прямые действия. Полигонируем эти векторы, исходя из точки M, так что отрезки $MM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4$ будут соответственно эквиполлентны этим векторам. Предположим сначала, что эта ломаная не замыкается. Фиксируем в плоскости произвольную точку P (полюс), не расположенную ни на одной из сторон ломаной, и обозначим через $\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4$ соответственно векторы $\overline{PM}, \overline{PM_1}, \overline{PM_2}, \overline{PM_3}, \overline{PM_4}$; проведем также произвольную прямую a, параллельную вектору $\overline{PM}$; она пересечет прямую r_1 в определенной точке A_1, так как прямая PM пересекает вектор $\overline{MM_1}$, параллельный r_1. Далее, через точку A_1 проведем прямую a_1, параллельную PM_1, до пересечения с r_2 в точке A_2; из точки A_2 проведем прямую a_2, параллельную MP_2, до пересечения с r_3 в точке A_3; из точки A_3 проведем прямую a_3, параллельную PM_3, до пересечения с r_4 в точке A_4; наконец, из точки A_4 проведем прямую a_4, параллельную PM_4. Так как точка M_4, по условию, не совпадает с M, то прямые a_4 и a пересекутся в некоторой точке A. Если теперь через точку A проведем прямую r, параллельную MM_4, то вектор $\boldsymbol{R} = \Sigma_i \boldsymbol{v}_i$ параллелен r. Если на прямой r отложим вектор $\boldsymbol{R}$, приложив его в точке A, то он будет эквивалентен данной системе Σ. В самом деле, так как



Фиг. 30.

$$\overline{PM} + \overline{MM_1} = \overline{PM_1},$$

то и аналогично

$$\begin{array}{llllll}
\text{система } (\bar{\alpha} & \text{на } a & \text{и } \boldsymbol{v}_1 & \text{на } r_1) & \text{эквивалентна} & \bar{\alpha}_1 \text{ на } a_1 \\
\quad\text{»} \quad (\bar{\alpha}_1 & \text{» } a_1 & \text{» } \boldsymbol{v}_2 & \text{» } r_2) & \quad\text{»} & \bar{\alpha}_2 \text{ » } a_2 \\
\quad\text{»} \quad (\bar{\alpha}_2 & \text{» } a_2 & \text{» } \boldsymbol{v}_3 & \text{» } r_3) & \quad\text{»} & \bar{\alpha}_3 \text{ » } a_3 \\
\quad\text{»} \quad (\bar{\alpha}_3 & \text{» } a_3 & \text{» } \boldsymbol{v}_4 & \text{» } r_4) & \quad\text{»} & \bar{\alpha}_4 \text{ » } a_4.
\end{array}$$

Складывая эти соотношения почленно и устранив в обеих частях общие векторы, получим:

$$\text{система } (\bar{\alpha} \text{ на } a, \Sigma) \text{ эквивалентна } \bar{\alpha}_4 \text{ на } a_4,$$

а потому

$$\text{система } \Sigma \text{ эквивалентна системе } (\bar{\alpha}_4 \text{ на } a_4, \; -\bar{\alpha} \text{ на } a).$$

[1]) Ср. *G. Bisconcini*, „Esercizi e complementi die meccanica razionale“, Milano, Lib. ed. Politechnica, 1927, стр. 20—21.

Так как векторы $\overline{a}_4$ и $-\overline{a}$ мы можем считать приложенными в точке A, а в то же время $\overline{a}_4 - \overline{a} = \boldsymbol{R}$, то последнее соотношение устанавливает, что система Σ эквивалентна вектору $\boldsymbol{R}$ на прямой r.

Если полигон данных векторов замыкается, так что точка M_4 совпадает с M и, следовательно, прямая PM_4 совпадает с PM, то прямые a и a_4 имеют одно и то же направление. Если они параллельны, то система Σ эквивалентна *паре* ($\overline{a}$ на a_4 и $-\overline{a}$ на a); если же они совпадают, то система уравновешена.

Ломаную, составленную прямыми a, a_1, a_2, a_3, a_4, называют *веревочным многоугольником*. Мы приходим, таким образом, к следующему заключению. Если полигон, составленный из векторов системы, открыт, то система эквивалентна одному вектору; если полигон векторов замыкается, но упомянутый веревочный многоугольник остается открытым, то система эквивалентна паре; если, наконец, оба рассмотренные многоугольника оказываются замкнутыми, то мы имеем дело с уравновешенной системой.

22. Соответственные стороны двух веревочных многоугольников, отвечающих одной и той же плоской системе векторов, но построенных при различных полюсах, пересекаются на прямой, параллельной той, которая соединяет два полюса[1]).

23. Чтобы система двух векторов была эквивалентна одному вектору, необходимо и достаточно, чтобы оба вектора лежали в одной и той же плоскости, но не были друг другу противоположны.

24. Исследуем *плоскую* кривую, опираясь на соображения § 11.

a) Выбрав произвольно точку O (полюс), будем обозначать через $\overline{\rho}$ радиус-вектор точки P кривой, через ρ — его длину. Тогда:

$$\frac{d\overline{\rho}}{ds} = \boldsymbol{t}, \quad \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{1}{r}\boldsymbol{n}, \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\frac{1}{r}\boldsymbol{t},$$

где r есть радиус кривизны кривой в точке P. Показать, что последнее соотношение можно вывести из предыдущего, не пользуясь общими формулами Френе.

b) Предположим, что кривая в окрестности точки P обращена к точке O вогнутостью, т. е. что векторы $\overline{\rho}$ и $\boldsymbol{n}$ образуют тупой угол. В таком случае длина P перпендикуляра, опущенного из точки O на касательную к кривой в точке P, равна $-\overline{\rho}\,\boldsymbol{n}$. Показать, что диференцирование соотношения $P = -\overline{\rho}\,\boldsymbol{n}$ приводит к известному выражению радиуса кривизны:

$$r = \rho\frac{d\rho}{dp}.$$

25. Как известно, под *окружностью кривизны* данной кривой l в некоторой ее точке P разумеют (предельную) окружность, определяемую точкой P и двумя другими бесконечно близкими к P точками кривой (или, если угодно, окружность, касающуюся кривой в точке P и проходящую еще через точку, бесконечно близкую к P). Положение центра C этой окружности определяется равенством

$$\overline{PC} = r\boldsymbol{n}.$$

Определяя аналогично соприкасающуюся сферу, показать, что ее центр C' падает в точку, определяемую равенством

$$\overline{PC'} = r\boldsymbol{n} - \tau\frac{dr}{ds}\boldsymbol{b}.$$

26. Как для круглого цилиндра (ср. рубр. 88—90), так и для любого другого цилиндра винтовой линией называется кривая, пересекающая все образующие под одним и тем же углом.

Показать, что для всякой винтовой линии отношение двух кривизн сохраняет постоянное значение, и, обратно, если на кривой линии отношение двух кривизн сохраняет постоянное значение, то она представляет собою цилиндрический винт (круглый, если обе кривизны сохраняют постоянные значения порознь).

---

[1]) Для доказательства как этого, так и других свойств веревочных многоугольников см. приведенное выше сочинение *Bisconcini*, стр. 23 и сл. Ср. также *Guidi*, Lezioni sulla Scienza delle costruzioni, Parte I, Statiça grafica, X изд. (Гвиди, Лекции по строительному делу, ч. I, Графическая статика), Torino, Bona 1925,