достаточно точный для измерения времени принятой универсальной единицей — секундой среднего солнечного времени. Установив некоторый строго определенный момент, который принимается за *начало отсчета времени* $t = 0$, всякий другой момент однозначно определяют соответствующей *временной абсциссой* t, т. е. числом секунд, протекших между началом отсчета и рассматриваемым моментом; этому числу присваивается еще знак $+$ или $-$, смотря по тому, следует ли рассматриваемый момент времени за начальным моментом или предшествует ему.

Все это справедливо, если принять традиционную схему кинематики, которой мы и будем исключительно придерживаться. Следует, однако, отметить, что первое и основное расхождение между классической схемой и новейшей *теорией относительности* касается именно времени и того способа, которым сравниваются результаты измерения времени, полученные различными наблюдателями. Теория относительности внесла мощную обновляющую струю в механику и физику, хотя в большинстве случаев (и, в частности, во всех явлениях, которыми интересуется техника) разница в количественных оценках, произведенных на основе старой или новой теории, настолько мала, что ею можно пренебречь.

Теория относительности не постулирует, как это делает классическая схема, никакой универсальной меры времени и не приписывает результату измерения переменной t одно и то же значение для любого наблюдателя. Она прибегает к конкретному исследованию, чтобы выяснить, возможно ли и, если возможно, то в каких пределах, согласовать результаты измерения времени $t, t', \ldots$, полученные различными наблюдателями $O, O', \ldots$ При этом теория относительности предполагает, что эти наблюдатели пытаются добиться такого согласования путем обмена оптическими сигналами.

Опираясь на эту физическую основу, теория относительности приходит к необходимости заменить абстрактную концепцию абсолютного времени концепцией местных времен $t, t', \ldots$ (собственных времен отдельных исследователей $O, O', \ldots$). Для наблюдателей, движущихся друг относительно друга, их собственные времена оказываются связанными соотношениями, менее простыми, чем простое тождество (или перемена начала $t = t' + \text{const.} = \ldots$).

2. Аналитические средства для определения движения точки.

4. Рассмотрим некоторую точку P, находящуюся в движении по отношению к определенному триэдру ортогональных декартовых координат, который, как уже было указано в предыдущей главе, мы будем всегда считать *правосторонним*. В каждый момент интервала времени от t_0 до t_1, в течение которого точка P находилась в движении относительно нашего триэдра $Oxyz$, она занимала относительно него определенное положение;

вследствие этого точка P определена в этом интервале как переменная точка, представляющая собою однозначную функцию времени:

$$P = P(t)\ ^{1)}. \tag{1}$$

Это единственное геометрическое уравнение равносильно трем скалярным уравнениям:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \tag{2}$$

где x, y, z суть координаты точки P по отношению к установленному триэдру осей. Правые части этих уравнений представляют собой три скалярные функции времени, определенные в интервале от t_0 до t_1. В соответствии с этим характером определения функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ мы будем считать их однозначными, конечными, непрерывными во всем интервале от t_0 до t_1 (диференцируемыми, по крайней мере, дважды) [2].

Уравнение (1) или заменяющие его скалярные уравнения (2) называются уравнениями движения точки P.

5. Геометрическое место точек, которые движущаяся точка P занимает во время движения, представляет собою дугу кривой, называемой *траекторией* движущейся точки (за данный промежуток времени). На уравнения (2) можно смотреть как на параметрические уравнения траектории; исключая из них t, мы получим обычные декартовы ее уравнения.

Если траектория представляет собой дугу плоской кривой или отрезок прямой линии, то самое движение называют соответственно *плоским* или *прямолинейным*.

В то время как точка P движется по своей траектории, как это выражается уравнениями (2), проекции этой точки на оси координат, в свою очередь, совершают движение каждая по своей оси. Каждое из уравнений (2) выражает прямолинейное движение одной из этих проекций — соответственно P_x, P_y, P_z. Обратно, если заданы совершенно произвольно движения трех точек P_x, P_y, P_z, происходящие в один и тот же промежуток времени по осям координат, то этим определяется движение в пространстве некоторой точки P, которая в каждый момент имеет своими проекциями на оси координат точки P_x, P_y, P_z. Относительно движения точки P говорят, что оно *составлено* из прямолинейных движений точек P_x, P_y, P_z (*составляющие движения*); и поскольку оси координат представляют собой произвольные попарно перпендикулярные прямые, выходящие из произвольной же точки пространства, то всякое движение точки может быть *разложено* на три составляющих прямолинейных движения, по любым трем осям, образующим ортогональную связку.

---

[1]) Как мы знаем (рубр. 71), это эквивалентно тому, что радиус-вектор точки представляет собою функцию времени $\overline{OP} = \overline{OP}(t)$. (*Ред.*)

[2]) Только в теории ударов приходится иметь дело со схемой отображения явлений движения, которые предполагают разрыв первых производных функций (2)

Совершенно аналогично этому, когда точка P движется в пространстве, ее проекция P_1 на плоскость $z=0$ совершает в результате этого плоское движение, которое выражается первыми двумя уравнениями системы (2), т. е.

$$x=x(t),\ y=y(t).$$

Движение точки P, обратно, вполне определяется плоским движением точки P_1 по плоскости $z=0$ и одновременным движением точки P_z по прямой, перпендикулярной к этой плоскости. При этих условиях говорят, что движение точки P *составлено* из плоского движения точки P_1 и перпендикулярного к этой плоскости прямолинейного движения точки P_z. И поскольку плоскость $z=0$ и ось z, по существу, представляют собою произвольную плоскость и перпендикулярную к ней прямую, мы видим, что движение точки в пространстве всегда можно *разложить* на плоское движение, происходящее в любой плоскости, и перпендикулярное к нему прямолинейное движение.

6. Пусть t и $t+\Delta t$ будут два произвольные момента в интервале, в котором происходит движение точки P; положения $P(t)$ и $P(t+\Delta t)$, которые в эти моменты занимает точка P, определяют вектор (I, рубр. 71) ΔP:

$$P(t+\Delta t)-P(t)=\overline{OP}(t+\Delta t)-\overline{OP}(t),$$

где O — произвольная зафиксированная точка пространства; компоненты вектора ΔP имеют значения:

$$x(t+\Delta t)-x(t),\ y(t+\Delta t)-y(t),\ z(t+\Delta t)-z(t);$$

этот вектор называется *смещением* точки P за промежуток времени Δt, начиная с момента t. В частности, для бесконечно малого $\Delta t=dt$ вектор

$$P(t+dt)-P(t)$$

представляет собою *элементарное смещение*, отнесенное к моменту t, и, по крайней мере, до бесконечно-малых высших порядков выражается диференциалом переменной точки dP (I, рубр. 79); это элементарное смещение есть бесконечно малый вектор, имеющий компонентами

$$dx=\dot{x}\,dt,\ dy=\dot{y}\,dt,\ dz=\dot{z}\,dt,$$

где $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ суть производные от x, y, z по t [1]). Этот вектор dP направлен по касательной к траектории в сторону движения и имеет абсолютное значение:

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt, \tag{3}$$

где радикал взят в арифметическом своем значении.

---

[1]) В дальнейшем символами, выражающими точку, вектор или скаляр, зависящие от времени, с точкою наверху мы будем обозначать исключительно их производные *по времени*.

Если на траектории установим систему криволинейных абсцисс s, приняв за начало отсчета произвольную точку — начальное положение точки P, соответствующее, скажем, моменту t_0, — а за положительную сторону ту, которая обращена от точки $P(t_0)$ к точке $P(t_1)$, то арифметическое значение радикала (3) даст абсолютное значение $|ds|$ *элемента пути* ds, пройденного движущейся точкой P в *элемент времени* dt, начинающийся в момент t. В точности же

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt, \tag{4}$$

где верхний знак $+$ должен быть взят в том случае, когда точка P в рассматриваемый элемент времени dt движется в сторону возрастающих значений s, а нижний — при движении в противоположную сторону.

Суммируя абсолютные значения последовательных элементов пути (3), пройденных точкой P от момента t_0 до произвольного момента t_1, т. е. вычисляя интеграл:

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt,$$

мы получим *весь путь*, пройденный точкой по своей траектории в установленный промежуток времени; при этом, следовательно, значение каждого элемента пути взято с положительным знаком, независимо от того, в какую сторону в этот элемент времени происходило движение.

Напротив, если каждому элементу (4) мы припишем соответствующий ему знак, то интеграл

$$\int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t} \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_0}^{t} \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

даст для любого момента t, падающего в интервал движения, соответствующую ему криволинейную абсциссу, определяющую положение точки P на траектории в момент t. Этот последний интеграл представляет собою вполне определенную функцию времени $s(t)$; в условиях, установленных для функций (2), это будет также конечная и однозначная функция, допускающая производные, по крайней мере, до второго порядка включительно. Уравнение

$$s = s(t) \tag{5}$$

называется в этом случае *путевым уравнением движения* [1]). Плоская кривая, которая выражается уравнением (2) в декартовых

---

[1]) Авторы употребляют термин „equazione oraria" — „часовое уравнение". Смысл его заключается в том, что уравнение (5) по показанию часов t определяет s, а вместе с тем и положение точки на траектории. Но по показанию часов t положение точки определяется и уравнениями (2). Существенным здесь является то, что одно скалярное уравнение (5) определяет положение точки, если известен описываемый ею *путь*, траектория движения. (*Ред.*)

координатах (ортогональных), если за абсциссу принимается время t, а за ординату s, называется *путевой диаграммой* движения [1]).

7. Из предыдущего, таким образом, ясно, что движение точки P вполне определяется как уравнениями движения (2), так и любым геометрическим заданием траектории (например, при помощи двух уравнений, связывающих x, y, z, или трех параметрических уравнений при совершенно произвольном параметре) совместно с путевым уравнением (5).

В более общем виде движение точки P может быть определено тем, что ее положение задается в функции каких угодно параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$P = P(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n), \tag{6}$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$, в свою очередь, представляют собою заданные функции времени:

$$q_i = q_i(t) \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{7}$$

В самом деле, достаточно, очевидно, подставить функции (7) в правую часть уравнения (6), чтобы привести его к виду (1). В этих случаях уравнения (7) также называются уравнениями движения [2]).

3. Скорость.

8. **Равномерное движение по любой траектории. Скорость.** Чтобы дать математически точное выражение нашему представлению о различной быстроте, с которой может протекать движение во времени, мы поставим себя сначала в наиболее простые условия. С этой целью предположим, что нам задана траектория движущейся точки, которой может служить какая угодно кривая l; тогда для определения движения, как нам известно, достаточно располагать *путевым уравнением*:

$$s = s(t).$$

В первую очередь, имея в виду наиболее простой тип движений, обычно происходящих перед нашими глазами (видимое движение солнца, поезда, часовых стрелок и т. п.), мы предположим, что расстояние s, пройденное точкой P, начиная от некоторого ее положения $P(t_0)$, принятого за начало расстояний, изменяется пропорционально промежутку времени $t - t_0$, в течение которого оно пройдено движущимся телом, это значит:

$$\frac{s}{t - t_0} = \text{const}.$$

[1]) Авторы и в этом случае употребляют термин „diagramma orario“ — „часовая диаграмма“. Термином „путевая диаграмма“ или „путевой график“ обычно пользуются в железнодорожной практике.

[2]) Если, например, точка P движется по заданной сфере, то удобно определять ее положение долготой (q_1) и широтой (q_2). Движение будет известно, если q_1 и q_2 будут заданы в функции времени t. (*Ред.*)