координатах (ортогональных), если за абсциссу принимается время t, а за ординату s, называется *путевой диаграммой* движения [1]).

7. Из предыдущего, таким образом, ясно, что движение точки P вполне определяется как уравнениями движения (2), так и любым геометрическим заданием траектории (например, при помощи двух уравнений, связывающих x, y, z, или трех параметрических уравнений при совершенно произвольном параметре) совместно с путевым уравнением (5).

В более общем виде движение точки P может быть определено тем, что ее положение задается в функции каких угодно параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$P = P(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n), \tag{6}$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$, в свою очередь, представляют собою заданные функции времени:

$$q_i = q_i(t) \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{7}$$

В самом деле, достаточно, очевидно, подставить функции (7) в правую часть уравнения (6), чтобы привести его к виду (1). В этих случаях уравнения (7) также называются уравнениями движения [2]).

3. Скорость.

8. **Равномерное движение по любой траектории. Скорость.** Чтобы дать математически точное выражение нашему представлению о различной быстроте, с которой может протекать движение во времени, мы поставим себя сначала в наиболее простые условия. С этой целью предположим, что нам задана траектория движущейся точки, которой может служить какая угодно кривая l; тогда для определения движения, как нам известно, достаточно располагать *путевым уравнением*:

$$s = s(t).$$

В первую очередь, имея в виду наиболее простой тип движений, обычно происходящих перед нашими глазами (видимое движение солнца, поезда, часовых стрелок и т. п.), мы предположим, что расстояние s, пройденное точкой P, начиная от некоторого ее положения $P(t_0)$, принятого за начало расстояний, изменяется пропорционально промежутку времени $t-t_0$, в течение которого оно пройдено движущимся телом, это значит:

$$\frac{s}{t-t_0} = \text{const}.$$

---

[1]) Авторы и в этом случае употребляют термин „diagramma orario" — „часовая диаграмма". Термином „путевая диаграмма" или „путевой график" обычно пользуются в железнодорожной практике.

[2]) Если, например, точка P движется по заданной сфере, то удобно определять ее положение долготой (q_1) и широтой (q_2). Движение будет известно, если q_1 и q_2 будут заданы в функции времени t. (*Ред.*)

Если обозначим эту постоянную через v, то путевое уравнение примет вид:

$$s = v(t - t_0), \tag{8}$$

т. е. пройденное расстояние представляет *линейную функцию времени*. И, обратно, всякое путевое уравнение, линейное относительно времени, очевидно, может быть представлено в виде (8).

Всякое движение описанного типа, путевое уравнение которого является линейным относительно времени, называется *равномерным*.

Опираясь на соотношение (8), фиксируем два произвольные момента t и $t + \Delta t$; расстояние Δs, пройденное точкой P в определенный таким образом промежуток времени Δt, согласно уравнению (8), выражается формулой:

$$\Delta s = v(t + \Delta t - t_0) - v(t - t_0) = v\,\Delta t,$$

откуда

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v; \tag{9}$$

это значит: *для какого угодно промежутка времени Δt, начинающегося в какой угодно момент, отношение пройденного за этот промежуток расстояния к продолжительности самого промежутка времени имеет постоянное значение v.*

Полагая, в частности, в соотношении (9) $\Delta t = 1$, мы видим, что v есть длина пути, пройденного точкой P в *единицу времени*. Это число v называется *скоростью рассматриваемого равномерного движения*. Скорость представляет собою, таким образом, физическую (или точнее кинематическую) величину нового типа, которая определяется как отношение некоторой *длины* к некоторому *промежутку времени*; если за единицу длины выбран метр, а за единицу времени секунда, то мы можем принять за единицу скорости *метр в секунду*, т. е. скорость такого равномерного движения, при котором движущаяся точка в каждую секунду проходит по своей траектории метр пути.

Небесполезно будет показать, что только что данное определение скорости равномерного движения находится в полном согласии с тем значением быстроты движения, которое мы с этим понятием соединяем в обычной речи; в самом деле, если две точки P_1 и P_2 движутся равномерно со скоростями v_1 и v_2, то в *один и тот же промежуток времени* Δt они, согласно формуле (9), пробегают расстояния:

$$\Delta s_1 = v_1\,\Delta t \quad \text{и} \quad \Delta s_2 = v_2\,\Delta t,$$

и мы будем иметь:

$$\Delta s_1 > \Delta s_2,\ \Delta s_1 = \Delta s_2 \quad \text{или} \quad \Delta s_1 < \Delta s_2,$$

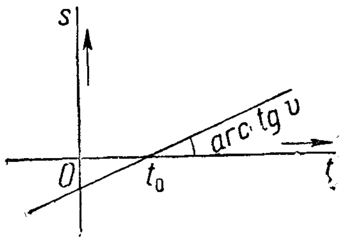
смотря по тому, будет ли

$$v_1 > v_2,\ v_1 = v_2 \quad \text{или} \quad v_1 < v_2.$$

9. До сих пор мы не делали никаких предположений относительно знака числа v. Между тем соотношение

$$\Delta s = v\,\Delta t,$$

в котором предполагается $\Delta t > 0$ (т. е. промежуток Δt рассматривается в его естественной последовательности по течению времени), показывает, что Δs имеет тот же знак, что и v. Это означает, что за рассматриваемый промежуток времени точка движется в сторону, принятую при отсчете криволинейных абсцисс за положительную, или в противоположную, в зависимости от того, имеет ли v положительное или отрицательное значение. В соответствии с этим движение называется *прогрессивным* или *регрессивным*. Таким образом скорость v, взятая со своим знаком, дает не только меру быстроты движения, но и сторону, в которую оно обращено. Полезно, однако, предупредить, что, по большей части, говоря о скорости равномерного движения, имеют в виду не столько скорость, как она выше определена, сколько ее абсолютное значение.



Фиг. 31.

10. Путевая диаграмма равномерного движения, выражаемая уравнением:

$$s = v\,(t - t_0),$$

представляет собою прямую, которая пересекает ось времени в точке $t = t_0$ (абсцисса начального момента) и имеет угловым коэфициентом скорость v (фиг. 31).

Диаграммы (прямолинейные) равномерных движений, нанесенные на миллиметровую бумагу, дают удобное средство для графического решения задач о скрещивании, настигании и тому подобных явлениях нескольких точек, равномерно двигающихся по одной и той же траектории (экипажи по одной и той же дороге, поезда по тем же или параллельным рельсам). В частности, очень полезное применение эти диаграммы получают в так называемых железнодорожных графиках.

11. Скалярная скорость какого угодно движения. Перейдем теперь к случаю, когда на любой заданной траектории определено движение своим путевым уравнением:

$$s = s\,(t),$$

где $s\,(t)$ — какая угодно функция от t. Здесь вновь выберем промежуток времени Δt от t до $t + \Delta t$ и определим расстояние, пройденное точкой P за этот промежуток:

$$\Delta s = s\,(t + \Delta t) - s\,(t);$$

отношение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s\,(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \tag{10}$$

[отношение наращения функции $s(t)$ к наращению независимой переменной, начиная со значения t последней] называется *средней скоростью* движущейся точки *за промежуток времени от* t *до* $t+\Delta t$. Теперь заметим, что отношение (10) можно интерпретировать как (постоянную) скорость фиктивной точки P', которая равномерным движением описывает ту же кривую l, что и точка P таким образом, что она в моменты t и $t+\Delta t$ занимает те же положения на траектории, что и точка P. В течение самого промежутка Δt движение точки P может многообразно отличаться от движения фиктивной точки P' (она может сначала отставать от нее, затем догнать ее в определенный момент и т. п.). Но если вместо первоначально взятого интервала Δt мы возьмем меньший промежуток, начинающийся, однако, с того же момента t, и для него вновь вообразим фиктивную точку P', движущуюся равномерно и совпадающую с P в начальный и конечный моменты интервала, то ясно, что эти два движения (истинное и фиктивное) уже будут друг от друга отличаться меньше, чем в предыдущем случае, и вообще тем меньше, чем меньше самый интервал Δt. Если мы поэтому будем представлять себе, что интервал Δt, последовательно уменьшаясь, стремится к нулю, то мы, естественно, придем к следующему определению:

Скоростью точки, движущейся по некоторой траектории по путевому уравнению $s=s(t)$ *в произвольный момент* t, *называется предел*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t},$$

т. е. *значение производной* $\dot{s}(t)$ *от функции* $s(t)$ *в момент* t (каковая, согласно сделанным предположениям, непременно существует).

Если предыдущее определение применим к равномерному движению, т. е. к движению, имеющему путевое уравнение (8), то мы получим ту же постоянную v, которую мы уже назвали для этого случая скоростью движения.

Обратно, если движение имеет постоянную скорость v, то, интегрируя уравнение

$$\frac{ds}{dt}=v,$$

мы получим:

$$s=vt+\text{const.},$$

т. е. это движение равномерное. Мы отсюда заключаем, что *равномерные движения характеризуются постоянством скорости каждого из них.*

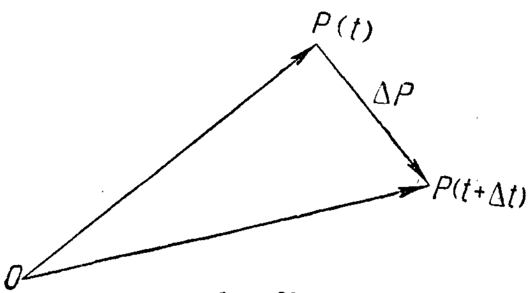
В заключение полезно будет уже здесь отметить, что скорость, таким образом определенную, называют, правильнее, *скалярной скоростью* в отличие от векторной скорости, о которой будет речь впереди.

12. В силу известной геометрической интерпретации производной скорость в момент t представлена на диаграмме движения угловым коэфициентом касательной в точке, соответствующей абсциссе t. В зависимости от того, имеет ли производная $s(t)$, т. е. скорость движения, в момент t положительное или отрицательное значение, функция $s(t)$ вблизи t возрастает или убывает; иначе говоря, в каждом достаточно малом интервале, который следует за моментом t или предшествует ему, движение является соответственно *прогрессивным* или *ретроградным*.

Если, далее, $\dot{s}(t)=0$, то в этот момент движущееся тело находится в *состоянии остановки*; на диаграмме этот момент изображается точкой, в которой касательная параллельна оси абсцисс; но в такой момент непосредственно не ясно, в какую сторону обращено движение; это требует более тщательного исследования. Как известно из анализа, чтобы в этом случае установить характер изменения функции $s(t)$, необходимо обратиться к дальнейшим производным; первая из них, которая не обращается в нуль, дает требуемое указание. Так, например, если остановимся на наиболее обычном случае, когда $\ddot{s}(t)$ не обращается в нуль, то можно утверждать, что $s(t)$ имеет в этот момент t максимум при $\ddot{s}(t)<0$ и минимум при $\ddot{s}(t)>0$; с точки зрения кинематической, это означает, что в момент t сторона, в которую обращено движение, меняется; и именно, при $\ddot{s}(t)<0$ движение, прогрессивное до момента t (вблизи него), становится регрессивным после него; при $\ddot{s}(t)>0$ происходит противоположное обращение.

Наконец, прибавим еще, что движение называется в момент t (или в промежуток от t до $t+\Delta t$) *ускоренным или замедленным, смотря по тому, имеют ли эти производные общий знак или противоположные знаки.*

13. Векторная скорость. До сих пор мы вычисляли скорость движения, принимая во внимание только пути, проходимые точкой *по траектории*. При этом мы совершенно не учитывали смещения точки P в пространстве; в самом деле, выражение $\dot{s}(t)$, принятое нами за (скалярную) скорость движения, вовсе не изменилось бы, если бы мы изменили траекторию (скажем, изогнули бы ее в пространстве без растяжения), но сохранили бы то же путевое уравнение, т. е. тот же закон движения точки по траектории. Между тем, для нас важно установить способ измерения скорости, который характеризовал бы также смещение точки в пространстве.



Фиг. 32.

Возвратимся для этого к уравнению движения точки P:

$$P = P(t)$$

или в декартовых координатах, отнесенных к триэдру $Oxyz$:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Рассмотрим теперь смещение ΔP, которое претерпевает точка P в произвольный промежуток времени Δt от момента t до момента $t + \Delta t$ (фиг. 32); вектор

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t),$$

очевидно, представляет собою это смещение, соответствующее скалярному значению Δt нашего интервала. При этих условиях вектор

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t},$$

приложенный в точке $P(t)$ и имеющий прямой действия прямую $P(t)P(t+\Delta t)$, а своими скалярными компонентами

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t},\quad \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t},\quad \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t},$$

называется *средней векторной скоростью* за рассматриваемый промежуток времени.

Если теперь, сохраняя момент t, будем уменьшать интервал Δt, неограниченно приближая его к нулю, то средняя векторная скорость будет стремиться к предельному вектору

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = \dot{P}(t),$$

приложенному в точке $P(t)$ и имеющему компонентами скалярные производные

$$\dot{x}(t),\ \dot{y}(t), \dot{z}(t).$$

Функцию $P(t)$ мы можем рассматривать как функцию от криволинейной абсциссы s точки P, а скаляр s — как функцию времени t. Диференцируя сообразно этому P как сложную функцию, получим:

$$\dot{P} = \frac{dP}{ds}\dot{s}(t) = \dot{s}(t)\boldsymbol{t},$$

где $\boldsymbol{t}$, как и в рубр. I, 75, означает единичный вектор, направленный по касательной к траектории в точке $P(t)$ и обращенный в сторону нарастающих s. Найденное выражение для вектора $\dot{P}(t)$ непосредственно обнаруживает, что он имеет длину, равную абсолютному значению $|\dot{s}(t)|$ скалярной скорости точки P в тот же момент t, что он направлен по касательной к траектории в точке $P(t)$, что он при этом обращен в сторону вектора $\boldsymbol{t}$ (т. е. в сторону возрастающих значений s) или в противоположную, в зависимости от того, имеет ли $\dot{s}(t)$ положительное или отрицательное значение, а это равносильно тому, что вектор $\dot{P}(t)$ всегда обращен в сторону движения.

Все эти соображения оправдывают введение нового понятия — *векторной скорости* точки P в момент t, под которой именно и разумеют вектор $\dot{P}(t)$, т. е. *производную от $P(t)$ по времени, отнесенную к рассматриваемому моменту t.*

Мы положим:

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{P}(t)$$

и впредь, говоря просто о скорости точки, всегда будем разуметь именно эту векторную скорость $\boldsymbol{v}$; число же $\dot{s}(t)$ мы, как уже было указано выше, будем впредь всегда называть *скалярной* скоростью. Если же нужно будет рассматривать, как нам это иногда придется, абсолютное значение $v = |\dot{s}(t)|$ векторной скорости, то мы можем его называть *напряжением скорости* [1]).

Между скоростью и элементарным смещением в силу определения всегда существует соотношение

$$dP = \boldsymbol{v}\, dt,$$

и если мы выберем произвольную постоянную точку O, например, начало координат, то (I, рубр. 71):

$$\frac{d\overline{OP}}{dt} = \frac{dP}{dt} = \boldsymbol{v}(t).$$

14. Внутренний характер скорости. Чтобы определить движение точки P, мы должны были установить, как систему координации, определенный координатный триэдр $Oxyz$. Если вместо этого мы выберем другой триэдр $\Omega\xi\eta\zeta$, *неподвижный* относительно первого, то (декартовы) уравнения (2) движущейся точки P изменятся (именно, подвергнутся соответствующему преобразованию координат), но векторная скорость от этого не изменится, подобно тому как не изменятся ни форма траектории, ни закон движения по ней (путевое уравнение).

Это становится очевидным, если уяснить себе внутренний по отношению к движению характер определения скорости; но к этому можно притти и следующими точными соображениями. Обозначим через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, основные версоры триэдра $Oxyz$ и через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ координаты точки P в момент t. По отношению к этому триэдру мы будем иметь во всякий момент (I, рубр. 18):

$$\overline{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}; \tag{11}$$

но это геометрическое уравнение определит, конечно, движение точки P и по отношению к любому другому триэдру, если мы в каждом отдельном случае отнесем к новому триэдру как точку P, так и векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

---

[1]) Термин введен авторами настоящего сочинения. (*Ред.*)

Положим, соотношение (11) отнесено к триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$; мы получим выражение векторной скорости, диференцируя обе части этого уравнения по t. Так как по отношению к триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$, по предположению, неподвижному относительно триэдра $Oxyz$, точка P и векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ остаются постоянными, то мы получаем:

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}; \tag{11a}$$

отсюда следует, что и при новом триэдре координации векторною скоростью служит тот вектор, который имеет в системе $Oxyz$ компоненты $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

На языке декартовой аналитической геометрии это означает следующее: можно вычислить компоненты векторной скорости относительно триэдра $Oxyz$ и потом произвести преобразование координат к системе $\Omega\xi\eta\zeta$; можно сначала произвести преобразование координат, и затем вычислить компоненты векторной скорости относительно $\Omega\xi\eta\zeta$; результат получится один и тот же. Можно это выразить коротко, в современной терминологии, если сказать, что компоненты скорости конгредиентны координатам точки [1]).

[1]) Остановимся еще на рассуждениях настоящей рубрики. Прежде всего о самом понятии „внутренний характер" скорости. „Внутренними свойствами" геометрического или механического объекта (carattere intrinseco) называются такие свойства, которые получены аналитическими средствами, но не зависят от координации, характеризуя действительно геометрическое или механическое свойство объекта. Чтобы обнаружить, что тот или иной вывод приводит, действительно, к „внутреннему свойству" объекта, можно поступить двояко. Во-первых, можно определить это свойство чисто геометрическими или механическими соображениями, и тогда результат вычисления не может зависеть от координации. Так, производная функция точки $P(t)$ есть предел вектора, представляющего собою смещение точки ΔP, разделенное на скаляр Δt; это определение свободно от каких бы то ни было координатных соображений и потому устанавливает „внутренне" связанное с функцией точки $P(t)$ понятие о производном векторе $\dot{P}(t)$. Определяя векторную скорость движущейся точки как производную $\dot{P}(t)$, мы устанавливаем „внутренний" характер этого понятия. Во-вторых, можно найти аналитическое выражение устанавливаемой величины и затем *доказать*, что оно не меняется (остается инвариантным) при преобразовании координат; в настоящей рубрике авторы приводят именно такое доказательство *инвариантности* векторной скорости. Но и самое содержание доказательства, быть может, недостаточно ясно; оно заключается в следующем. При координатном триэдре $Oxyz$ и основных версорах $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ имеет место соотношение (11), которое приводит к выражению скорости (11a). Положим, что по отношению к триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$ координаты точки P суть $\xi\eta\zeta$, а основные версоры суть $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$. Тогда в среде $\Omega\xi\eta\zeta$

$$\overline{\Omega P} = \xi\boldsymbol{i}' + \eta\boldsymbol{j}' + \zeta\boldsymbol{k}',$$

или, так сказать, для обитателя среды $\Omega\xi\eta\zeta$ скорость выразится производной:

$$\dot{\overline{\Omega P}} = \dot{\xi}\boldsymbol{i}' + \dot{\eta}\boldsymbol{j}' + \dot{\zeta}\boldsymbol{k}'.$$

Но так как второй триэдр останется неподвижным относительно первого, то с одной стороны,

$$\overline{\Omega P} = \overline{OP} + \overline{\Omega O},$$

Важно еще отметить тут же, что все эти соображения справедливы в том предположении, что триэдр $\Omega\xi\eta\zeta$ остается неподвижным относительно триэдра $Oxyz$; обстоятельства складываются совершенно иначе, если новый триэдр *движется* относительно первоначального; это мы увидим ниже (гл. IV).

15. В случае плоского движения скорость всегда расположена в плоскости движения, так как она направлена по касательной к траектории. Точно так же в случае прямолинейного движения скорость во всякий момент направлена по прямой, по которой происходит движение.

Обращаясь вновь к движению точки P в пространстве, рассмотрим движение

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

ортогональной проекции P_1 точки P на плоскость $z = 0$ (рубр. 5), скорость точки P_1 представляет собою вектор, лежащий в той же плоскости и имеющий компоненты $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$; иными словами, этот вектор представляет собою проекцию скорости точки P на плоскость $z = 0$. Точно так же скорость ортогональной проекции P_z точки P на ось z представляет собою проекцию на эту ось скорости точки P. Так как, с другой стороны, каждую неподвижную плоскость мы можем принять за плоскость $z = 0$ и всякую (перпендикулярную к ней) прямую за ось z, то мы приходим к следующему заключению:

Если точка P движется в пространстве, то скорость $\boldsymbol{v}_1$ ее ортогональной проекции P_1 на произвольную плоскость (неподвижную) или на произвольную прямую (также неподвижную) совпадает с ортогональной проекцией на ту же плоскость или, соответственно, на ту же прямую скорости $\boldsymbol{v}$ точки P.

Сопоставляя это с тем, что изложено в рубр. 5, мы можем еще сказать: *если движение точки P в пространстве разложено на три прямолинейные движения по трем попарно взаимно перпендикулярным прямым или плоское движение и перпендикулярное ему прямолинейное движение, то скорость движения точки P в каждый момент представляет собою сумму (результирующую) скоростей слагающих движений.*

16. Движения с постоянной скоростью. В рубр. 8 мы видели, что равномерные движения (по любой траектории) характеризуются постоянством их *скалярной* скорости. Рассмотрим теперь движение более частного типа, происходящее с *постоянной векторной скоростью.*

Если $\boldsymbol{v}$ есть постоянная скорость движения, то мы можем выбрать триэдр $Oxyz$ так, чтобы ось x имела направление и сторону обращения вектора $\boldsymbol{v}$; тогда компоненты последнего будут

где $\overline{\Omega O}$ — постоянный вектор. С другой стороны, и для обитателя среды $\Omega\xi\eta\zeta$ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ остаются тремя неподвижными версорами (правда, это для него не основные версоры): для него остаются в силе соотношения (11) и (11a), т. е.

$$\dot{\overline{\Omega P}} = \dot{\overline{OP}}, \quad \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} = \dot{\xi}\boldsymbol{i} + \dot{\eta}\boldsymbol{j} + \dot{\zeta}\boldsymbol{k}. \text{(Ред.)}$$

иметь значения v, 0, 0, где v есть длина его. Выражая аналитически, что движущаяся точка P (x, y, z) имеет заданную скорость $\boldsymbol{v}$, мы получим три уравнения (диференциальных):

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Интегрируя их, мы получаем уравнения движения:

$$x = vt + c_1, \quad y = c_2, \quad z = c_3, \tag{12}$$

где c_1, c_2, c_3 суть *постоянные интегрирования.*

Выбирая эти три постоянные произвольно, мы получаем ∞^3 движений, имеющих данную векторную скорость; все они, как это явствует из уравнений (12), имеют траекториями прямые линии (при нашей координации — параллельные оси абсцисс), по которым движение происходит равномерно; таким образом *всякое движение, имеющее постоянную векторную скорость, есть прямолинейное и равномерное.*

Чтобы индивидуализировать каждое такое движение, т. е. чтобы определить значения постоянных интегрирования, достаточно задать положение, которое движущаяся точка должна занимать в какой-либо момент t_0: если x_0, y_0, z_0 суть координаты этого „начального" положения точки P, то уравнения движения принимают вид:

$$x = x_0 + v(t - t_0), \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

в чем мы убеждаемся, подчиняя уравнения (12), вернее, содержащиеся в них произвольные постоянные, тому условию, чтобы при $t = t_0$ координаты x, y, z получали значения $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Эти задания — координаты движущейся точки в начальный момент t_0 — называются *начальными условиями* движения.

17. Движения с заданною скоростью. Соображения предыдущей рубрики приводят к более общей задаче о *разыскании движений, совершающихся с заданной скоростью, хотя бы и переменной.*

Если v_x, v_y, v_z суть компоненты скорости $\boldsymbol{v}$, представляющие собою функции от t, то координаты x, y, z должны изменяться в функции от t таким образом, чтобы удовлетворялись диференциальные уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dx}{dt} = v_z. \tag{13}$$

Так как скорость $\boldsymbol{v}$ предполагается заданной, то ее компоненты суть заданные функции времени; мы предполагаем их интегрируемыми. Тогда уравнения (13) интегрируются в трех квадратурах.

Обозначая через t_0 момент в промежутке времени, для которого задана скорость $\boldsymbol{v}$, мы получим:

$$x = \int_{t_0}^{t} v_x\,dt + c_1, \quad y = \int_{t_0}^{t} v_y\,dt + c_2, \quad z = \int_{t_0}^{t} v_z\,dt + c_3.$$

Как и выше, присутствие трех произвольных постоянных обнаруживает, что существует ∞^3 движений, удовлетворяющих требованию. Каждое из них определяется, если задано положение движущейся точки в какой-либо момент, например, если известно, что в момент t_0 движущаяся точка занимает положение $P_0(x_0 y_0 z_0)$. Уравнения движения имеют в таком случае вид:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x\,dt, \quad y = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y\,dt, \quad z = z_0 + \int_{t_0}^{t} v_z\,dt.$$

Эти уравнения можно объединить в одном векторном уравнении:

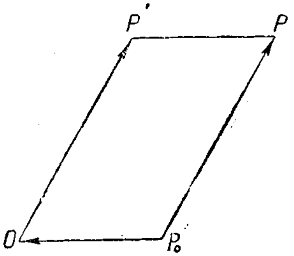
$$\overline{P_0P} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)\,dt, \tag{14}$$

где под $P = P(t)$ разумеем положение движущейся точки в момент t. Это соотношение мы могли бы получить и непосредственно, интегрируя векторное уравнение:

$$\dot{\overline{P_0P}} = \boldsymbol{v}(t),$$

эквивалентное уравнениям (13).

Уравнение (14) обнаруживает, в каком соотношении находятся между собой ∞^3 движений, имеющих ту же скорость $\boldsymbol{v}$. Сравним два таких движения, например, движение общего вида (14) и движение точки P', которая при той же скорости $\boldsymbol{v}$ находится в момент t_0 в начале координат O. В применении к движению точки P' уравнение (14) примет вид:



Фиг. 33.

$$\overline{OP'} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)\,dt.$$

Следовательно, $\overline{OP'} = \overline{P_0P}$; равенство этих векторов влечет за собою равенство векторов $\overline{PP'} = \overline{P_0O}$ (фиг. 33).

Так как P есть положение первой точки в любой момент t, а P' — положение в тот же момент второй точки, то траектория второй движущейся точки отличается от траектории первой только тем, что все ее точки смещены на один и тот же вектор $\overline{P_0O}$. Таким образом векторной скоростью, заданной в функции времени, траектория движущейся точки геометрически определяется вполне; в зависимости от начального положения, она может быть только смещена в пространстве параллельно самой себе на определенный вектор; не претерпевает при этом никакого изменения и путевое уравнение.

18. Обратимся теперь к еще более общему случаю, когда скорость движущейся точки задана в функции не одного только времени, но и самого положения точки, т. е. когда

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(P/t).$$

В этом случае компоненты скорости v_x, v_y, v_z заданы в функции четырех переменных x, y, z, t; задача сводится к разысканию трех функций времени x, y, z, удовлетворяющих системе диференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t)\,^{1)}. \qquad (15)$$

В этом случае решение задачи требует, таким образом, как говорят обыкновенно, интегрирования системы диференциальных уравнений (15). Как известно из анализа, это интегрирование, вообще, не может быть выполнено в квадратурах и тем менее в конечном числе элементарных функций; это можно только сделать путем разложения неизвестных функций в ряды. Во всяком случае, при достаточно широких условиях для функций четырех переменных v_x, v_y, v_z доказывается, что система (15) допускает бесчисленное множество решений, которые в совокупности составляют *общий интеграл*, зависящий от трех произвольных постоянных; однако они, как правило, не носят характера аддитивных постоянных [2]).

Таким образом и в этом общем случае также существует ∞^3 различных движений, имеющих данную скорость $\boldsymbol{v}$; и в этом случае, располагая тремя произвольными постоянными, можно выделить одно из этих движений, если потребовать в виде начальных условий, чтобы движущаяся точка в некоторый определенный (начальный) момент проходила через данное положение в пространстве. Понятно, конечно, что при этих условиях переход от одного из ∞^3 движений к другому связан с изменением как вида кривой, так и путевого уравнения.

---

[1]) Заметим, что система диференциальных уравнений (15) эквивалентна одному векторному уравнению:

$$\dot{P} = f(P, t),$$

которое часто допускает непосредственное интегрирование без перехода к соответствующей скалярной системе. (*Ред.*)

[2]) Полезно напомнить, что для системы обыкновенных совокупных диференциальных уравнений, число которых равно числу неизвестных функций и которые разрешаются относительно производных высших порядков, вообще, существует система интегралов, зависящих от произвольных постоянных, число которых равно сумме порядков высших производных. Так, например, общий интеграл системы диференциальных уравнений

$$\ddot{u} = \varphi(t, u, \dot{u}, v, \dot{v}, \ddot{v}), \quad \dddot{v} = \psi(t, u, \dot{u}, v, \dot{v}, \ddot{v})$$

зависит от пяти произвольных постоянных.