4. Выражение плоских движений в полярных координатах. Секториальная скорость.

19. Радиальная и поперечная скорость. Угловая скорость. Положим, что в плоскости относительно системы осей Oxy декартовых ортогональных координат происходит движение точки P, выражаемое уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{16}$$

Отнесем это движение к системе полярных координат, имеющей полюсом начало O декартовых координат, а полярной осью положительную полуось x-ов; за положительную сторону обращения аномалий (полярных углов) примем ту, при которой переход от ориентированной оси x к ориентированной же оси y совершается путем поворота на прямой угол. Аномалии будем измерять в радианах.

В течение движения радиус-вектор ρ и аномалия $\theta = x\widehat{OP}$ движущейся точки P будут определенными функциями времени; уравнения

$$\rho = \rho(t) \quad \text{и} \quad \theta = \theta(t) \tag{17}$$

можно назвать *уравнениями движения* в полярных координатах. Но здесь необходимо одно существенное замечание. Как известно из аналитической геометрии, чтобы обеспечить взаимно однозначную зависимость между точками плоскости и парами значений полярных координат ρ и θ, необходимо на последние наложить ограничения, выражающиеся неравенствами $\rho > 0$, $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$. Но при этих условиях, если точка P в своем плоском движении обойдет вокруг начала координат в положительную сторону и перейдет через положительную полуось x-ов (полярную ось), то аномалия θ обречена на то, чтобы при этом внезапно перескочить со значения 2π на значение 0. Таким образом в функцию θ в уравнении (17) вводится разрыв, который, однако, ни в какой мере не характеризует разрыва в самом движении; он зависит только от ограничения $\theta < 2\pi$, условия, наложенного на аномалию θ. В таких случаях, чтобы уничтожить разрыв, так сказать, искусственно созданный, обыкновенно отказываются от этого ограничения аномалии и допускают, чтобы θ, следуя непрерывному ходу движения, непрерывно же изменялось и проходя через 2π, т. е. получало бы при этих условиях значения, превышающие 2π.

Аналогично этому, если точка P, двигаясь непрерывно, без внезапного разрыва скорости, проходит через полюс, вышеуказанные ограничения значений ρ и θ приводят к тому, что аномалия и здесь претерпевает разрыв: в то время как ρ при прохождении через полюс достигает наименьшего своего значения 0 и затем начинает вновь непрерывно возрастать, аномалия делает скачок от значения θ_0 (предельное значение аномалии, когда P непрерывным движением приближается к полюсу) к значению $\theta_0 \pm \pi$. Но и здесь искусственно нарушенная непрерывность может быть при надобности восстановлена, если отказаться от ограничения $\rho > 0$ и принять, что радиус-вектор, проходя через нуль, может непрерывно перейти от положительных значений к отрицательным, и обратно.

К этому приему мы прибегаем тогда, когда по существу дела важно сохранить непрерывность соответствия между точкой P и ее полярными координатами ρ, θ. При этом, однако, как нами уже было отмечено, приходится примириться с потерей однозначности (того же соответствия) во всякой области, для которой начало O является внутренней точкой. Декартовы координаты свободны от подобных дефектов.

Приняв все это, припомним, что между функциями (16) и (17) существуют известные соотношения:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta.$$

Диференцируя эти уравнения, мы получим для компонент скорости выражения:

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta; \tag{18}$$

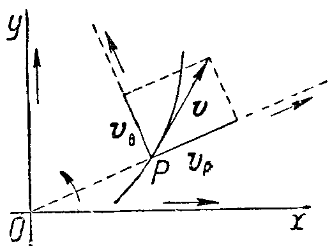
комбинируя же эти соотношения с формулами преобразования координат, получим:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2\dot{\theta}, \tag{18a}$$

а отсюда для квадрата скалярной скорости формулу:

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2. \tag{19}$$

Это выражение приводит к разложению скорости на две ортогональные компоненты, которые целесообразно установить непосредственно.



Фиг. 34.

С этой целью рассмотрим вместе с осью OP перпендикулярную к ней прямую в точке P и ориентируем эту прямую таким образом, чтобы она была расположена относительно OP так же, как ось y ориентирована относительно оси x (фиг. 34). Так как направляющие косинусы оси OP и ориентированного перпендикуляра к ней суть $\cos\theta$, $\sin\theta$ и соответственно

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta, \qquad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta,$$

то проекции v_ρ и v_θ скорости $\boldsymbol{v}$ на эти новые две оси будут иметь скалярные значения:

$$v_\rho = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta, \qquad v_\theta = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta.$$

Подставляя сюда вместо $\dot{x}$ и $\dot{y}$ их значения (18), получим:

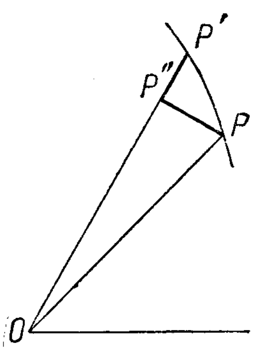
$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\theta = \rho\dot{\theta}.$$

Это суть компоненты векторной скорости v по построенным двум новым осям; возвышая эти компоненты в квадрат и складывая их, мы получим вновь соотношение (19).

Компонента v_ρ называется *радиальной скоростью,* так как

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}$$

представляет собою отношение элементарного наращения расстояния точки от начала (полюса) O к соответствующему элементу времени dt, поэтому v_ρ называют также *скоростью удаления* точки (от полюса).



Фиг. 35.

Слагающая v_θ называется *поперечной* или *поворотной* (по отношению к радиусу-вектору) *скоростью* точки; наконец, производная

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

называется угловой скоростью точки, так как она выражает скорость изменения аномалии θ. Поворотная скорость v_θ представляет собою произведение радиуса-вектора ρ на угловую скорость точки. Если мы это запишем в виде:

$$v_\theta = \frac{\rho\, d\theta}{dt},$$

то числитель этой дроби выразит длину дуги поворота PP'', которую описала бы вокруг полюса точка P (фиг. 35), если бы радиус-вектор, переходя из положения OP в OP', не менял своей длины (так что PP'' была бы дуга окружности). Поэтому компоненту v_θ называют *поворотной скоростью* точки.

20. Секториальная скорость. При движении точки P радиус-вектор OP описывает некоторую площадь. Ее измеряют, отсчитывая ее от некоторого начального положения OP_0 радиуса-вектора (фиг. 36) и считая ее положительной, когда она обращена в сторону возрастающих аномалий, и отрицательной в противоположном случае; будем обозначать через A значение, которое она принимает в произвольный момент t, когда движущаяся точка занимает положение P. Пусть P' будет бесконечно близкое положение точки, занимаемое ею в момент $t+dt$. За элемент времени, протекающий от момента t до момента $t+dt$, точка P

описывает элемент площади POP', который (по крайней мере, до бесконечно малых высшего порядка) равен площади кругового сектора радиуса ρ с центральным углом (растворением), равным $d\theta$. Поэтому

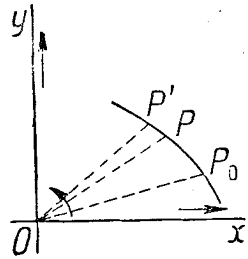
$$|dA| = \frac{1}{2}\rho^2 |d\theta|;$$

а так как, по нашему соглашению, dA и $d\theta$ имеют тот же знак, то

$$dA = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta,$$

а вместе с тем

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\rho^2 \dot{\theta}.$$



Фиг. 36.

По соображениям, которые после всего изложенного совершенно ясны, производную $\dot{A}$ называют *секториальной скоростью* точки P относительно центра O.

Соотношение (18а) приводит к выражению секториальной скорости в декартовых координатах:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}). \tag{20}$$

21. Понятие о секториальной скорости легко распространяется также на точку, совершающую совершенно произвольное движение в пространстве. Чтобы притти к этому обобщению, возвратимся сначала к случаю плоского движения и именно к выражению (20) угловой скорости относительно начала O. В точке O восставим к плоскости движения перпендикуляр и направим по нему ось z, ориентируя ее таким образом, чтобы получить правосторонний триэдр $Oxyz$. На этой оси нанесем вектор $\boldsymbol{v}$, длина которого равна абсолютной величине секториальной скорости (20) и который обращен в положительную или отрицательную сторону этой оси, смотря по тому, имеет ли секториальная скорость точки положительное или отрицательное значение; можно сказать, что вектор $\boldsymbol{v}$ отображает векториальную скорость как по величине, так и по знаку. Всматриваясь в выражение (20) ближе, мы видим, что построенный таким образом вектор $\boldsymbol{v}$ представляет собою половину векторного произведения двух векторов, имеющих компоненты:

$$x,\ y,\ 0 \quad \text{и} \quad \dot{x},\ \dot{y},\ 0,$$

т. е. векторов $\overline{OP}$ и $\boldsymbol{v}$. Таким образом

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}[\overline{OP}\,\boldsymbol{v}], \tag{21}$$

т. е. вектор v представляет собою *половину момента векторной скорости движущейся точки относительно (неподвижного) центра* O.

Этому вектору v, модуль которого дает секториальную скорость точки, как она выше определена в скалярном своем значении, и который в каждый момент определяет сторону движения, как правостороннего относительно него, присваивается название *векторной секториальной скорости данной движущейся точки относительно центра* O.

Это новое определение имеет по сравнению с предыдущим то преимущество, что оно сообщает секториальной скорости значение *внутреннего* характера, следовательно, не зависящее от координатного триэдра даже при изменении начала координат, лишь бы только оставался неподвижным центр O, относительно которого секториальная скорость точки определяется.

И именно вследствие этого внутреннего (инвариантного) своего характера новое определение непосредственно применяется также к любому движению точки в пространстве; именно, при любом движении секториальная скорость движущейся точки P относительно центра O определяется как векто́рное произведение

$$\frac{1}{2}[\overline{OP}v]; \tag{22}$$

это есть вектор, который в каждый момент движения перпендикулярен к плоскости (вообще говоря, переменной), проходящей в этот момент через центр O и через скорость движущейся точки v; он обращен таким образом, что движение в этот момент представляется относительно него правосторонним; его модуль представляет собою отношение элемента площади, которую радиус-вектор описывает в указанной сейчас плоскости в элемент времени к продолжительности этого элемента времени dt.

Если движение точки P отнесено к ортогональным декартовым координатам, начало которых совпадает с центром O, то компоненты секториальной скорости имеют значения (I, рубр. 27):

$$\frac{1}{2}(y\dot{z}-z\dot{y}), \qquad \frac{1}{2}(z\dot{x}-x\dot{z}), \qquad \frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x});$$

мы видим, что это суть скалярные секториальные скорости ортогональных проекций точки P на плоскости yz, zx, xy.

Отметим, наконец, что секториальная скорость, как это видно из соотношения (22), может в некоторый момент обратиться в нуль только в том случае, если наступает одно из следующих обстоятельств (I, рубр. 21): либо точка P проходит в этот момент через центр O; либо обращается в нуль скорость v; либо скорость направлена радиально, т. е. по прямой OP.