5. Ускорение.

22. Равномерно переменное движение. К понятию об ускорении мы приходим, вычисляя, так сказать, быстроту, с которой от момента к моменту изменяется скорость движущейся точки.

Подобно тому как мы это делали при определении скорости, обратимся к изучению внутреннего характера движения, считая заданной его траекторию, и начнем с того сравнительно простого случая (можно сказать, наиболее простого после равномерного движения), когда скалярная скорость $\dot{s}$ движущейся точки представляет собою линейную функцию времени, т. е. когда

$$\dot{s} = at + b, \tag{23}$$

где a и b—постоянные; при этом $a \neq 0$, ибо при $a = 0$ мы имели бы равномерное движение. Постоянная b представляет собою скорость движения в момент $t = 0$; что касается постоянной a, то из соотношения (23) непосредственно вытекает вывод, совершенно аналогичный тому, который мы получили в рубр. 8, именно: *в течении движения изменение скорости* $\Delta\dot{s}$ *за любой промежуток времени* Δt *находится к продолжительности этого промежутка* Δt *в постоянном отношении, равном* a, т. е.

$$\frac{\Delta\dot{s}}{\Delta t} = a.$$

Эта постоянная a, которая, в частности, определяет изменение скорости в единицу времени, называется *ускорением* рассматриваемого движения; самое же это движение, с очевидным указанием характера изменения скорости с течением времени, называется *равномерно переменным*.

Небесполезно будет прибавить, что понятие об ускорении было впервые установлено Галилеем [1]) именно как изменение скорости в единицу времени для случая свободного падения тяжелых тел, которое, как мы увидим ниже, представляет собою равномерно изменяющееся движение.

Обращаясь к движению (23), отметим прежде всего, что ускорение a представляет в этом случае вторую производную $\ddot{s}$ криволинейной абсциссы s по времени. Таким образом в произвольный момент t движение, согласно критерию рубр. **12**,

---

[1]) Галилео Галилей (Galileo Galilei) родился в Пизе в 1564 г., умер в Арчетри в 1642 г., может считаться продолжателем Архимеда в области статики и творцом динамики [см. предисловие Фаваро (Favaro) к т. VIII в так называемом „национальном издании" сочинений Галилея]. Его капитальное сочинение носит название „Беседы и математические доказательства, относящиеся к двум новым наукам, касающимся механики и местных движений" („Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali"), Edizione Nazionale delle opere di Galileo, Vol. VIII *).

*) Имеется русский перевод (ГТТИ 1934). (*Ред.*)

будет ускоренным или замедленным, в зависимости от того, будет ли

$$a(at+b)>0 \quad \text{или} \quad <0.$$

Но эти неравенства мы можем писать в виде:

$$a^2\left(t+\frac{b}{a}\right)>0 \quad \text{или соответственно} <0.$$

Отсюда мы заключаем, что движение будет замедленным, пока $t<-\frac{b}{a}$, т. е. до момента $-\frac{b}{a}$; в этот момент скорость обращается в нуль, происходит остановка, после чего движение уже навсегда становится ускоренным.

Можно, таким образом, сказать, что в равномерно переменном движении всегда имеются две фазы: первая фаза *замедления*, вторая — *ускорения*.

Чтобы, далее, еще ближе установить ход рассматриваемого движения, рассмотрим еще, бывает ли оно *прогрессивным* или *регрессивным* и при каких условиях оно имеет тот или другой характер. Так как это зависит (рубр. 12) от знака скорости

$$\dot{s}=a\left(t+\frac{b}{a}\right),$$

то мы и рассмотрим два случая, когда $a>0$ и когда $a<0$.

В первом случае $\dot{s}$ имеет положительное значение при $t+\frac{b}{a}>0$ и отрицательное при $t+\frac{b}{a}<0$; это значит, движение будет ретроградным до момента $t=-\frac{b}{a}$, т. е. в фазе замедления; прогрессивным оно будет в ускоренной фазе. В случае $a<0$ дело будет обстоять обратно: движение будет прогрессивным в фазе замедления и регрессивным в фазе ускорения.

Интегрируя диференциальное уравнение (23), мы получим путевое уравнение движения:

$$s=\frac{1}{2}at^2+bt+c, \tag{24}$$

где постоянная интегрирования c представляет собою криволинейную абсциссу движущейся точки в момент $t=0$.

Если отсчитывать время от момента остановки $\left(-\frac{b}{a}\right)$, т. е. если положить

$$t_1=t+\frac{b}{a}, \tag{25}$$

то уравнение (23) примет вид:

$$\dot{s}=at_1. \tag{23'}$$

Мы получим абсциссу положения точки в момент остановки, если в формуле (24) положим $t = -\frac{b}{a}$; это даст:

$$\frac{2ac - b^2}{2a}.$$

Приняв момент остановки за начало отсчета времени, т. е., выполнив преобразование (25), мы теперь и расстояния s будем отсчитывать от положения точки в момент остановки, т. е. мы положим:

$$s_1 = s - \frac{2ac - b^2}{2a};$$

тогда формула (24) значительно упростится. В самом деле, ввиду того, что вышеуказанное преобразование мы считаем выполненным, уравнение (23′) сохранит свой вид, т. е.:

$$\dot{s}_1 = at_1.$$

Интегрируя это уравнение, будем иметь:

$$s_1 = \frac{1}{2} at_1^2 + c_1.$$

Но так как теперь при $t_1 = 0$ и s_1 должно обращаться в нуль, то $c_1 = 0$; мы получим окончательно:

$$s_1 = \frac{1}{2} at_1^2. \tag{24′}$$

Представим себе теперь, что некоторое движение этого рода можно рассматривать не в каком-нибудь определенном промежутке времени, а на всем протяжении времени, т. е. от $t_1 = -\infty$ до $t_1 = +\infty$; так, это может иметь место, например, в случае прямолинейной траектории. Тогда уравнение (24′) показывает, что при неограниченно возрастающих значениях t_1, как положительных, так и отрицательных, s_1 стремится к бесконечности, и притом в обоих случаях к положительной бесконечности, если $a > 0$, и к отрицательной, если $a < 0$ [1]).

Сверх того, если рассмотрим два момента $-t_1$ и t_1 (из которых один предшествует моменту остановки, а другой на такой же промежуток времени следует за ним), то мы видим из уравнений (23′) и (24′), что в такие два момента движущаяся точка проходит через то же положение на траектории и с тем же напряжением скорости, обращенной, однако, в эти моменты в противоположные стороны.

[1]) Это значит, при движениях этого рода движущаяся точка несется из бесконечности к моменту остановки, затем поворачивает обратно и уносится в бесконечность. См. ниже в тексте. (*Ред.*)

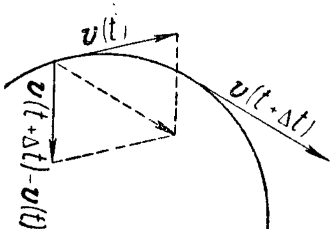
Возвращаясь теперь к общему случаю, т. е. к произвольному выбору начала времен и начала расстояний, мы можем дать изложенному следующее выражение.

При равномерно переменном движении, выражаемом путевым уравнением (24), *точка продвигается с бесконечно большого расстояния со стороны положительных или отрицательных абсцисс, смотря по тому, имеет ли ускорение a положительное или отрицательное значение; равномерно замедленным движением она доходит до точки, имеющей абсциссу*

$$\frac{2ac-b^2}{2a}, \tag{26}$$

которой она достигает в момент $-\dfrac{b}{a}$; *вслед за этим точка поворачивает обратно и равномерно ускоренным движением несется в ту сторону, из которой пришла; в каждом положении она при этом приобретает скорость того же напряжения, что и при первом прохождении через это положение, но обращенную в обратную сторону.*

Уравнение (24) показывает, что путевая диаграмма равномерно переменного движения представляет собою параболу, ось симметрии которой параллельна оси времени; эта парабола обращена своей вогнутостью в сторону положительных или отрицательных времен, в зависимости от того, имеет ли a положительное или отрицательное значение. Эта диаграмма также отчетливо обнаруживает различные обстоятельства, установленные выше аналитическим путем.



Фиг. 37.

23. Ускорение. Обратимся вновь к точке, произвольно движущейся в пространстве, и определим векторное ускорение этого движения, руководясь внутренними его свойствами.

Рассмотрим наращение (векторное):

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t),$$

которое получает скорость движения в интервале от произвольно взятого момента t до $t+\Delta t$, и приложим вектор $\Delta \boldsymbol{v}$ в точке $P(t)$ (фиг. 37); затем разделим его на Δt. Полученный, таким образом, вектор

$$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

выражает среднее нарастание скорости и имеет компонентами

$$\frac{\dot{x}(t+\Delta t)-\dot{x}(t)}{\Delta t}, \quad \frac{\dot{y}(t+\Delta t)-\dot{y}(t)}{\Delta t}, \quad \frac{\dot{z}(t+\Delta t)-\dot{z}(t)}{\Delta t};$$

этот вектор называется *средним ускорением* точки P за промежуток времени от t до $t+\Delta t$.

Ускорением точки P в момент t называется предел, к которому стремится среднее ускорение за интервал Δt, когда продолжительность его при неизменном начальном моменте стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{(\Delta t)}.$$

Этот предел представляет собою производную $\dot{\boldsymbol{v}}$ скорости $\boldsymbol{v}$ по времени или также, поскольку $\boldsymbol{v}=\frac{dP}{dt}$, вторую производную $\frac{d^2P}{dt^2}=\ddot{P}$ точки P по времени. Обозначая поэтому ускорение, представляющее собою векторную функцию времени, через $\boldsymbol{a}(t)$, будем иметь, согласно определению:

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2P}{dt^2};$$

компоненты ускорения по осям координат имеют значения:

$$a_x=\ddot{x}(t), \quad a_y=\ddot{y}(t), \quad a_z=\ddot{z}(t). \tag{27}$$

Ускорение является, таким образом, новой кинематической величиной, которая представляет собою, если оставим в стороне ее векторный характер, отношение некоторой скорости к промежутку времени. Поэтому, приняв уже за единицы для измерения расстояния и времени метр и секунду, можно принять за единицу ускорения „ускорение в 1 *м/сек²*“, т. е. ускорение того равномерно ускоренного движения, при котором скорость нарастает в секунду на 1 *м/сек.*

24. Из внутреннего по отношению к движению характера определения ускорения непосредственно вытекает, что формулы (27) остаются в силе, как бы мы ни меняли оси координат, лишь бы новые оси оставались *неподвижными* по отношению к старым; это утверждение можно также оправдать более точным анализом, совершенно аналогично тому, как это было сделано в случае скорости (рубр. **14**). Вместе с тем, как и в рубр. **15**, мы приходим к следующим выводам.

В случае плоского или прямолинейного движения ускорение всегда лежит в плоскости или на прямой движения.

Если точка движется в пространстве, то ускорение ее проекции на плоскость или на прямую всегда совпадает с проекцией на эту плоскость или, соответственно, на эту прямую ускорения движущейся точки.

25. Мы увидим в динамике, какое капитальное значение имеет задача *определения движения точки по данному ускорению этого движения.* Наиболее общий случай этой задачи, к которому приводит теоретическое исследование явлений движения, заключается в том, что ускорение бывает задано в функции времени, положения точки и скорости:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(P, \dot{P}/t).$$

Это означает в аналитическом (скалярном) выражении, что компоненты a_x, a_y, a_z ускорения $\boldsymbol{a}$, отнесенные к некоторому определенному триэдру, заданы в функции переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$.

Задача сводится, таким образом, к интегрированию системы обыкновенных диференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{x} = a_x, \quad \ddot{y} = a_y, \quad \ddot{z} = a_z;$$

как известно, эти уравнения в достаточно широких условиях для функций a_x, a_y, a_z допускают бесчисленное множество решений, которые в своей совокупности зависят от *шести произвольных постоянных* [1]). Мы имеем, таким образом, ∞^6 различных движений, имеющих данное ускорение.

Чтобы индивидуализировать движение, т. е. выделить одно движение из этой совокупности их, необходимо фиксировать значение этих шести произвольных постоянных; для этого нужно присоединить подходящие начальные условия; достаточно, например, установить, что в заданный момент t_0 точка должна проходить через заданное положение $P_0(x_0, y_0, z_0)$ с заданной скоростью $\boldsymbol{v}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.

26. *Тангенциальное* (касательное) *и нормальное* ускорения. Ускорение $\boldsymbol{a}(t)$ представляет собою вектор, который, по определению, в каждый момент приложен в точке $P(t)$, в которой в этот момент находится движущаяся точка P. Чтобы уяснить себе, как этот вектор $\boldsymbol{a}$ может быть от момента к моменту расположен относительно траектории, воспользуемся соотношением:

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{t},$$

установленным в рубр. **13**. Диференцируем это соотношение по времени, рассматривая при этом единичный вектор $\boldsymbol{t}$ как функцию от криволинейной абсциссы s, которая, в свою очередь, представляет собою функцию времени $s(t)$. Если мы при этом воспользуемся соотношением Френе (I, рубр. **81**):

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{1}{r}\boldsymbol{n},$$

где r есть радиус кривизны траектории в точке $P(t)$, а $\boldsymbol{n}$ — версор главной нормали, направленной к центру кривизны, то мы получим:

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{t} + \dot{s}\dot{\boldsymbol{t}} = \ddot{s}\boldsymbol{t} + \dot{s}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\boldsymbol{t} + \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n}.$$

Отсюда, в первую очередь, вытекает, что компонента ускорения по бинормали равна нулю, т. е. *что ускорение в каждый момент движения расположено в соприкасающейся плоскости траектории в точке, занимаемой в этот момент движущейся точкой.*

[1]) См. примечание на стр. 105.

Две векторные компоненты $\ddot{s}t$ и $\frac{v^2}{r}n$, равно как и их скалярные значения $\ddot{s}$ и $\frac{v^2}{r}$, называются *тангенциальным* или *касательным* ускорением и — соответственно — *нормальным* или центростремительным ускорением. Первое направлено по касательной в сторону возрастающих значений s при $\ddot{s}>0$ и в противоположную сторону при $\ddot{s}<0$. Что касается второго, нормального ускорения, то его скалярное значение $\frac{v^2}{r}$ всегда положительно; поэтому это ускорение всегда направлено к центру кривизны и потому также называется *центростремительным*.

Касательное ускорение обращается постоянно в нуль в том, и только в том, случае, когда тождественно $\ddot{s}=0$, т. е. $\dot{s}$ есть постоянная. Таким образом, *равномерные движения* (рубр. 8) *характеризуются* (при любой траектории) *тем, что их касательное ускорение равно нулю*, т. е. что *они имеют чисто нормальное ускорение*.

Из предыдущей рубрики, вместе с тем, следует, что *равномерно переменные движения* (на любой траектории) *характеризуются постоянством касательного ускорения*; это не исключает существования нормального ускорения, вообще переменного; если при этом траектория не прямолинейная, то нормальное ускорение не может быть постоянно равно нулю. В самом деле, последнее имеет значение $\frac{v^2}{r}$; так как v не может постоянно равняться нулю (скорость может обращаться в нуль только в отдельных точках остановки), то нормальное ускорение может быть равно нулю во всех точках траектории только в том случае, если по всей траектории равно нулю $\frac{1}{r}$, т. е. ее кривизна; так как это имеет место только для прямой линии, то мы отсюда заключаем, что *отсутствие нормального ускорения во все время движения характеризует прямолинейное движение*.

Комбинируя предыдущие выводы, мы заключаем, что *равномерные прямолинейные движения характеризуются тем, что их ускорение* (*полное*) *тождественно равно нулю*.

6. Движения с постоянным ускорением. Движения тяжелых тел.

27. Законы движения тяжелых тел. Установив в предыдущих параграфах общие начала кинематики точки, мы в последующих параграфах настоящей главы приложим их к изучению различных частных случаев движения, которые систематически встречаются в различного рода конкретных вопросах. Мы начнем с изучения движений, происходящих с *постоянным ускорением*.