Две векторные компоненты $\ddot{s}t$ и $\frac{v^2}{r}n$, равно как и их скалярные значения $\ddot{s}$ и $\frac{v^2}{r}$, называются *тангенциальным* или *касательным* ускорением и — соответственно — *нормальным* или центростремительным ускорением. Первое направлено по касательной в сторону возрастающих значений s при $\ddot{s}>0$ и в противоположную сторону при $\ddot{s}<0$. Что касается второго, нормального ускорения, то его скалярное значение $\frac{v^2}{r}$ всегда положительно; поэтому это ускорение всегда направлено к центру кривизны и потому также называется *центростремительным.*

Касательное ускорение обращается постоянно в нуль в том, и только в том, случае, когда тождественно $\ddot{s}=0$, т. е. $\dot{s}$ есть постоянная. Таким образом, *равномерные движения* (рубр. 8) *характеризуются* (при любой траектории) *тем, что их касательное ускорение равно нулю,* т. е. что *они имеют чисто нормальное ускорение.*

Из предыдущей рубрики, вместе с тем, следует, что *равномерно переменные движения* (на любой траектории) *характеризуются постоянством касательного ускорения*; это не исключает существования нормального ускорения, вообще переменного; если при этом траектория не прямолинейная, то нормальное ускорение не может быть постоянно равно нулю. В самом деле, последнее имеет значение $\frac{v^2}{r}$; так как v не может постоянно равняться нулю (скорость может обращаться в нуль только в отдельных точках остановки), то нормальное ускорение может быть равно нулю во всех точках траектории только в том случае, если по всей траектории равно нулю $\frac{1}{r}$, т. е. ее кривизна; так как это имеет место только для прямой линии, то мы отсюда заключаем, что *отсутствие нормального ускорения во все время движения характеризует прямолинейное движение.*

Комбинируя предыдущие выводы, мы заключаем, что *равномерные прямолинейные движения характеризуются тем, что их ускорение (полное) тождественно равно нулю.*

6. Движения с постоянным ускорением. Движения тяжелых тел.

27. Законы движения тяжелых тел. Установив в предыдущих параграфах общие начала кинематики точки, мы в последующих параграфах настоящей главы приложим их к изучению различных частных случаев движения, которые систематически встречаются в различного рода конкретных вопросах. Мы начнем с изучения движений, происходящих с *постоянным ускорением.*

Типичный пример такого движения представляет падение тяжелых тел, предоставленных самим себе с определенной начальной скоростью, которая в частности может быть равна и нулю.

Законы движения тяжелых тел были установлены Галилеем; они получают выражение в следующих двух положениях:

1) *Тяжелое тело, предоставленное самому себе без начальной скорости* (т. е. выходящее из состояния покоя), *падает по вертикали, двигаясь с постоянным ускорением, направленным вертикально вниз и имеющим одно и то же значение для всех тел.*

2) *Тяжелое тело, брошенное в каком угодно направлении с какой угодно начальной скоростью, всегда движется с тем же самым ускорением, что и при свободном падении.*

Первый из этих законов в курсах физики устанавливается экспериментально при помощи машины Атвуда. Правда, нужно отметить, что интерпретация действия этого аппарата требует не только сведений из кинематики, но опирается существенно (как это будет показано в отделе динамики) на общие принципы механики. Как бы там ни было машина Атвуда дает первоначальную оценку ускорения при падении тяжелых тел; это так называемое *ускорение тяжести* (в скалярном его значении) принято обозначать буквой g.

Важно указать, что эти законы, как это было уже известно Галилею, могут иметь силу только в пустоте; в воздухе необходимо учесть сопротивление, которое оказывается воздухом движущимся в нем телам. Таким образом формулированные выше законы в применении к движению тяжелых тел в воздухе дают лишь приближенное представление о нем, иногда даже грубо приближенное. Но даже и в пустоте, если область наблюдения не ограничена надлежащим образом, в ускорении тяжести обнаруживаются заметные отклонения от вертикальной линии. Более того, и самое напряжение ускорения, как это установлено более точными экспериментальными измерениями, слегка меняется от места к месту; именно, оно увеличивается с широтой места и уменьшается с повышением над уровнем моря [1]).

Например, в следующих пунктах g (выраженное в $м/сек^2$ и предварительно приведенное к уровню воды в океане) имеет значения:

в Риме	(при северной широте в $41°53',5$)	$g = 9{,}8038$
„ Вене	(„ „ „ „ $48°12',7$)	$g = 9{,}8092$

[1]) Значения в важнейших пунктах Союза ССР:

Ленинград	(при северной широте в $59°57'$)	$g = 9{,}8193$
Москва	(„ „ „ „ $55°45'$)	$g = 9{,}8156$
Свердловск	(„ „ „ „ $56°48'$)	$g = 9{,}8162$
Харьков	(„ „ „ „ $50°\ 0'$)	$g = 9{,}8102$
Одесса	(„ „ „ „ $46°29'$)	$g = 9{,}8077$
Тифлис	(„ „ „ „ $40°43'$)	$g = 9{,}8018$

(*Ред.*)

в Париже	(при северной широте в 48°50′,2)	$g = 9{,}8096$
„ Лондоне (Гринвич)	(„ „ „ „ 51°28′,6)	$g = 9{,}8120$
„ Берлине (Потсдам)	(„ „ „ „ 52°22′,9)	$g = 9{,}8130$
„ Сингапуре	(„ „ „ „ 1°17′,3)	$g = 9{,}7807$
на мысе Флора (итал. экспед.)	(„ „ „ „ 79°56′,8)	$g = 9{,}8307$
в экспед. Нансена	(„ „ „ „ 85°55′,3)	$g = 9{,}8315$

Во всяком случае в не очень большом поле наблюдения можно в виде первого приближения принять, что тяжелые тела в своем движении имеют ускорение, постоянное по величине и направлению; это ускорение (векторное) мы будем обозначать через $\mathbf{g}$. Чтобы составить себе наглядное представление о движении какого угодно тяжелого тела, будет достаточно изучить движение точки P, имеющей постоянное ускорение $\mathbf{g}$; и ясно, что все, что мы скажем в этом случае, по существу, справедливо для движения точки с любым постоянным ускорением.

28. Движение тяжелых тел. Выбрав для координации триэдр, у которого ось y направлена вертикально вниз, вследствие чего плоскость xy будет вертикальной, мы получим для компонент ускорения g значения:

$$0,\ g,\ 0;$$

координаты же точки P должны будут во все время движения удовлетворять уравнениям:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = g, \quad \ddot{z} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, мы получим для скорости $\mathbf{v}$ значения:

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = gt + \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0, \tag{28}$$

где $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ означают компоненты (произвольные) скорости $\mathbf{v}_0$ в момент $t = 0$ (начальная скорость).

Повторное интегрирование дает уравнения движения:

$$x = \dot{x}_0 t + x_0, \quad y = \frac{1}{2} g t^2 + \dot{y}_0 t + y_0, \quad z = \dot{z}_0 t + z_0, \tag{29}$$

где x_0, y_0, z_0 суть координаты (произвольные) положения P_0 точки в момент $t = 0$ (начальное положение).

Без существенных ограничений мы можем принять, что начало координат O помещено в точке, представляющей начальное положение P_0; это приводит к тому, что мы можем положить в уравнениях (29) $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Если при этом начальная скорость v_0 не окажется уже в плоскости xy, т. е, если $\dot{z}_0$ уже не окажется равным нулю, то мы сможем вращением координатного триэдра вокруг оси y привести плоскость xy в положение, при котором она будет содержать начальную скорость v_0; более того, мы можем выполнить это так, чтобы компонента вектора v_0 по оси x, если она отлична от нуля, оказалась положительной.

По выполнении этого вращения мы будем иметь в уравнениях (28) и (29) $\dot{z}_0 = 0$, $\dot{x}_0 \geqslant 0$. Таким образом в результате произведенного преобразования к новым осям, теперь уже вполне определенным, уравнения (28) и (29) примут вид:

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = gt + \dot{y}_0, \quad \dot{z} = 0; \tag{28'}$$

$$x = \dot{x}_0 t, \quad y = \frac{1}{2} gt^2 + \dot{y}_0 t, \quad z = 0, \tag{29'}$$

причем $\dot{x}_0 \geqslant 0$.

Из третьего уравнения (29') непосредственно вытекает, что *движение тяжелого тела всегда происходит в одной плоскости, и именно в той вертикальной плоскости, которая содержит начальную скорость.*

Так как движение происходит в плоскости xy, то в системах уравнений (28') и (29') можно опускать последние уравнения.

Отметим еще следующее. Возвышая уравнения (28') почленно в квадрат и складывая их, мы получим для квадрата скорости v тяжелого тела в любой момент движения формулы:

$$v^2 = v_0^2 + 2g\dot{y}_0 t + g^2 t^2,$$

которое в силу второго из уравнений (29') можно написать в виде:

$$v^2 - v_0^2 = 2gy. \tag{30}$$

Эта последняя формула особенно замечательна, так как она устанавливает непосредственную зависимость, остающуюся в силе во всех случаях, между напряжением скорости тяжелого тела и высотой его поднятия (ср. гл. VIII; *интеграл живой силы*). *Именно, наращение квадрата скорости пропорционально высоте поднятия тяжелой точки над начальным ее положением.*

29. Исследуем сначала случай $\dot{x}_0 = 0$, т. е. *случай, когда начальная скорость v_0 вертикальна* (или, в частности, даже равна нулю). В таком предположении первое из уравнений (29') принимает вид $x = 0$; мы отсюда заключаем, что движение будет *прямолинейным*, и именно, что оно будет проходить по вертикали y. Нам останется только рассмотреть два уравнения:

$$\dot{y} = gt + \dot{y}_0, \quad y = \frac{1}{2} gt^2 + \dot{y}_0 t, \tag{31}$$

из которых второе (путевое уравнение) нам показывает, что это движение *равномерно ускоренное* (рубр. 22).

Так как при принятой ориентации оси y ускорение имеет положительное значение, то наше движение, рассматриваемое на всем естественном протяжении времени, т. е. от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, является регрессивным (рубр. 22), т. е. направлено вверх *в фазе замедления* до *момента остановки*

$$t = -\frac{\dot{y}_0}{g}, \tag{32}$$

и *прогрессивным*, т. е. направлено вниз, в *фазе ускорения*. Но мы здесь намерены рассмотреть движение только начиная с момента $t=0$; вследствие этого мы приходим к необходимости различать два случая, в зависимости от знака числа $\dot{y}_0$.

Если $\dot{y}_0 \geqslant 0$, т. е. если начальная скорость направлена (вертикально) вниз или вовсе равна нулю, то момент остановки, для которого по формуле (32) $t \leqslant 0$, предшествует моменту $t=0$ или, в крайнем случае, совпадает с ним; вследствие этого движение в этот момент уже находится в стадии прогрессивно ускоренной. Мы заключаем отсюда, что точка, выходя из положения 0, неограниченно опускается вниз по вертикали равномерно ускоренным движением.

Если, напротив того, $\dot{y}_0 < 0$, т. е. если начальная скорость направлена вертикально вверх, то значение t, которое дает формула (32), оказывается больше нуля. Таким образом в момент $t=0$ движение оказывается еще в фазе замедленно регрессивной; начиная с момента $t=0$, точка поднимается вверх по вертикали равномерно замедленным движением до момента (32), в который она достигает наибольшей высоты

$$\frac{\dot{y}_0^2}{2g} \tag{33}$$

[абсолютное значение y в момент (32)]; затем она падает обратно вниз, двигаясь равномерно ускоренно. Таким образом в течение промежутка от момента $-\frac{\dot{y}_0}{g}$ до $-\frac{2\dot{y}_0}{g}$ она совершает обратный путь, приобретая в каждый момент скорость, которую она имела в той же точке при подъеме, только обращенную в обратную сторону (рубр. 22). Мы получаем, таким образом, отчетливую картину движения тела, брошенного вертикально вверх.

30. Нам остается рассмотреть случай, когда $\dot{x}_0 > 0$ и, следовательно, начальная скорость не направлена вертикально. Перепишем вновь уравнения (28′) и (29′), опуская излишние:

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = gt + \dot{y}_0; \tag{28′}$$

$$x = \dot{x}_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2 + \dot{y}_0 t. \tag{29′}$$

Рассматривая в системах (28′) и (29′) первые уравнения отдельно и отдельно же вторые, мы убеждаемся, что движение точки в этом случае можно считать составленным из двух движений: одного равномерного по оси x и другого равномерно переменного по оси y, которое принадлежит к типу, рассмотренному в предыдущей рубрике.

Если исключим t из двух уравнений (29′), то получим уравнение траектории:

$$y = \frac{g}{2\dot{x}_0^2} x^2 + \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} x; \tag{34}$$

она представляет собою параболу, ось симметрии которой направлена вертикально вниз.

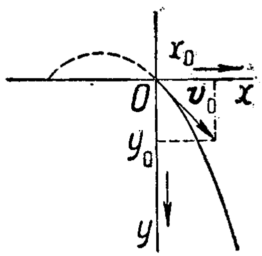
Заметим, далее, что скорость v ни в какой момент не может обратиться в нуль, так как ее горизонтальная слагающая $\dot{x}$ сохраняет постоянное значение $\dot{x}_0 > 0$. Наоборот, вертикальная компонента $\dot{y}$ обращается в нуль в момент

$$t = -\frac{\dot{y}_0}{g}. \tag{32}$$

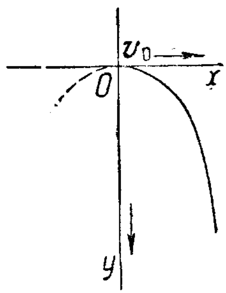
Напряжение скорости достигает в этот момент наименьшего своего значения $\dot{x}_0$; векторная же скорость становится в этот момент горизонтальной; поэтому касательная к траектории будет в этот момент также горизонтальной, и, следовательно, движущаяся точка находится в вершине параболы V. Это можно было предусмотреть, так как момент (32) явно представляет собою момент остановки равномерно переменного движения по оси y. Подставляя вместо t в уравнения (29′) значение (32), найдем координаты вершины параболы:

$$-\frac{\dot{x}_0\dot{y}_0}{g}, \quad -\frac{\dot{y}_0^2}{2g}. \tag{35}$$

Вторая из них никогда не может иметь положительного значения; иными словами, вершина параболы никогда не может оказаться ниже оси x.



Фиг. 38.



Фиг. 39.

Так как мы здесь, как и в предыдущем случае, намерены рассматривать движение только с момента $t=0$, то мы должны и здесь различать два случая в зависимости от знака компоненты $\dot{y}_0$.

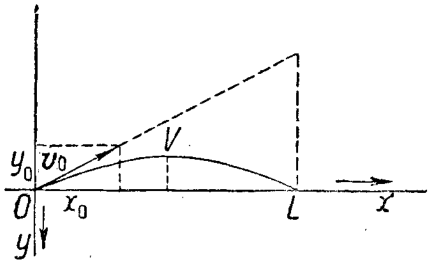
Если $\dot{y}_0 \geqslant 0$, т. е. если начальная скорость направлена наклонно вниз или же горизонтально (фиг. 38 и 39), то момент прохождения точки через вершину V параболы предшествует начальному моменту $t=0$ или совпадает с ним (при $\dot{y}_0=0$). Следовательно, с этого момента и впредь точка описывает нисходящую дугу параболы с напряжением скорости, растущим от наименьшего начального своего значения v_0 по закону, выраженному формулой (30).

31. Интереснее случай $\dot{y}_0 < 0$, когда начальная скорость направлена наклонно вверх (фиг. 40).

В этом случае точка, начиная с момента $t=0$, движется по восходящей ветви параболы до момента $t=-\frac{\dot{y}_0}{g}$, когда она достигает вершины параболы, а потому и наибольшей высоты над горизонталью x

$$\frac{\dot{y}_0^2}{2g}, \qquad (36)$$

равной абсолютному значению ординаты (35) вершины V; оно совпадает, как это вполне естественно, с выражением (33) рубр. **29**. В этой первой стадии движения напряжение



Фиг. 40.

скорости убывает вместе с y по формуле (30), так как в этом случае $\dot{y}_0 < 0$ [1]), в вершине параболы оно достигает своего минимума $\dot{x}_0$ (постоянная горизонтальная компонента скорости). С момента $t=-\frac{\dot{y}_0}{g}$ и впредь точка описывает нисходящую ветвь параболы со скоростью, напряжение которой неограниченно возрастает по закону (30). Она пересекает горизонталь x в точке L, симметричной O относительно оси параболы и потому имеющей абсциссу

$$-\frac{2\dot{x}_0\dot{y}_0}{g}, \qquad (37)$$

вдвое превышающую абсциссу вершины параболы (35). А так как движение проекции точки на ось абсцисс происходит равномерно, то для прохождения дуги параболы OL требуется время

$$-\frac{2\dot{y}_0}{g}, \qquad (38)$$

превышающее вдвое промежуток, за который она доходит до вершины V. Опускаясь по дуге VL, движущаяся точка имеет в каждый момент скорость, напряжение которой то же, что на этой же высоте по дуге OV, т. е. в точке, симметричной относительно оси параболы. Таким образом, в двух точках, расположенных симметрично относительно оси параболы, скорости также расположены по прямым, симметричным относительно оси, но они направлены вверх вдоль дуги OV и вниз на дуге VL.

---

[1]) Наглядно: точка подымается вверх, y принимает отрицательное значение, растущее по абсолютной величине. (*Ред.*)

32. Предыдущие соображения могут дать представления, правда, в первом приближении, о ходе движения снаряда, выпущенного из огнестрельного орудия. В этом случае обыкновенно выдвигается на первый план так называемый *угол вержения*, т. е. угол α (отсчитываемый положительно вверх), который ось жерла орудия, а следовательно, и начальная скорость снаряда, образует с горизонталью x. Тогда

$$\dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha, \quad \dot{y}_0 = -v_0 \sin\alpha; \tag{33'}$$

уравнение же траектории принимает вид:

$$y = \frac{g}{2\dot{x}_0^2} x^2 - \operatorname{tg}\alpha\, x = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 - x \operatorname{tg}\alpha. \tag{34'}$$

Дальность полета (по горизонтальной прямой) снаряда G, т. е. длина (37) хорды OL, будет равна:

$$G = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}; \tag{37'}$$

высота выстрела, т. е. наибольший подъем снаряда (36), будет равна:

$$A = \frac{\dot{y}_0^2}{2g} = \frac{g}{8\dot{x}_0^2} G^2, \tag{36'}$$

и, наконец, *продолжительность полета снаряда* (38):

$$T = -\frac{2\dot{y}_0}{g} = \frac{2v_0}{g} \sin\alpha. \tag{38'}$$

Формула (37′) показывает, что наибольший пробег снаряда имеет место при $\alpha = 45°$. В этом случае $G = \frac{v_0^2}{g}$, а продолжительность выстрела по формуле (38′) равна:

$$2\frac{v_0}{g}.$$

Прибавим, наконец, что под *опусканием* снаряда при абсциссе x разумеют расстояние между точкой траектории и точкой по касательной к ней в O, соответствующими абсциссе x. Так как уравнение этой касательной имеет вид:

$$y = -x \operatorname{tg}\alpha,$$

то мы находим, на основании соотношения (33′), что опускание $a(x)$ снаряда, соответствующее абсциссе x, по абсолютной величине имеет значение:

$$a(x) = \frac{g}{2\dot{x}_0^2} x^2$$

Если подставим в это выражение $x = G$ и полученный результат сравним с формулой (36′), то придем к выводу, что *высота полета составляет четверть опускания снаряда в конечной точке пробега.*

Следует, однако, упомянуть, что все эти численные результаты непосредственно не имеют никакого практического значения в баллистике, когда мы имеем дело с большими пробегами и выходим, таким образом, за пределы узкой окрестности, в которой можно придерживаться установленной здесь схемы явления.

При скоростях, развиваемых современным огнестрельным оружием, сопротивление воздуха коренным образом изменяет ход движения снаряда. Так, например, в случае ружейной пули, вылетающей с начальной скоростью в 625 *м/сек*, изложенная выше элементарная теория предусматривала бы (при угле вержения в 45°) наибольший пробег в 40 *км* и высоту в подъеме в 10 *км*; между тем, артиллеристы констатировали, что в действительности наибольший пробег снаряда достигается при угле вержения около 32° и мало превышает 3 *км*; высота же подъема, в среднем, не превышает 1 *км*.

7. Колебательные движения.

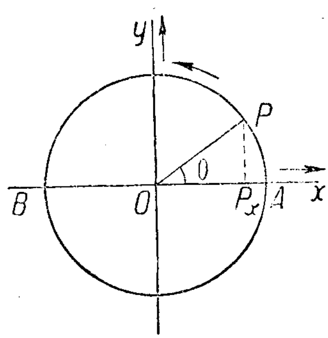
33. Равномерное круговое движение. Пусть точка P (фиг. 41) движется по окружности радиуса r, уравнение которой при совмещении начала координат с ее центром имеет вид:

$$x^2+y^2=r^2;$$

движение точки будет определено, коль скоро аномалия радиуса-вектора $\overline{OP}$ будет выражена в функции времени $\theta(t)$.

Уравнения движения будут (рубр. **19**):

$$x=r\cos\theta(t),\quad y=r\sin\theta(t),$$



Фиг. 41.

а скорость будет иметь компоненты:

$$\dot{x}=-r\dot{\theta}\sin\theta,\quad \dot{y}=r\dot{\theta}\cos\theta;$$

отсюда напряжение скорости

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=r\,|\dot{\theta}|,$$

т. е. скорость точки P в любой момент равна произведению радиуса траектории r на абсолютную величину угловой скорости $\dot{\theta}$; это можно было предвидеть на основе рубр. **19**, поскольку в этом случае длина радиуса-вектора $\overline{OP}$ остается постоянной, радиальная скорость, таким образом, равна нулю, и скорость точки P сводится к поворотной ее слагающей.

Чтобы поэтому круговое движение было равномерным [1]), необходимо и достаточно, чтобы угловая скорость $\dot{\theta}$ имела посто-

[1]) То есть имело постоянную скалярную скорость. (*Ред.*)