Следует, однако, упомянуть, что все эти численные результаты непосредственно не имеют никакого практического значения в баллистике, когда мы имеем дело с большими пробегами и выходим, таким образом, за пределы узкой окрестности, в которой можно придерживаться установленной здесь схемы явления.

При скоростях, развиваемых современным огнестрельным оружием, сопротивление воздуха коренным образом изменяет ход движения снаряда. Так, например, в случае ружейной пули, вылетающей с начальной скоростью в 625 *м/сек*, изложенная выше элементарная теория предусматривала бы (при угле вержения в 45°) наибольший пробег в 40 *км* и высоту в подъеме в 10 *км*; между тем, артиллеристы констатировали, что в действительности наибольший пробег снаряда достигается при угле вержения около 32° и мало превышает 3 *км*; высота же подъема, в среднем, не превышает 1 *км*.

7. Колебательные движения.

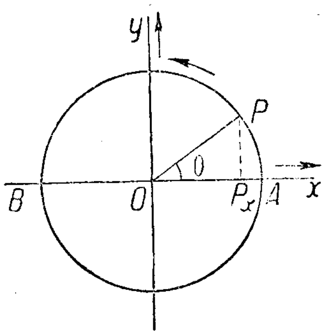
33. Равномерное круговое движение. Пусть точка P (фиг. 41) движется по окружности радиуса r, уравнение которой при совмещении начала координат с ее центром имеет вид:

$$x^2+y^2=r^2;$$

движение точки будет определено, коль скоро аномалия радиуса-вектора $\overline{OP}$ будет выражена в функции времени $\theta(t)$.

Уравнения движения будут (рубр. **19**):

$$x=r\cos\theta(t),\quad y=r\sin\theta(t),$$



Фиг. 41.

а скорость будет иметь компоненты:

$$\dot x=-r\dot\theta\sin\theta,\quad \dot y=r\dot\theta\cos\theta;$$

отсюда напряжение скорости

$$v=\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}=r\,|\dot\theta|,$$

т. е. скорость точки P в любой момент равна произведению радиуса траектории r на абсолютную величину угловой скорости $\dot\theta$; это можно было предвидеть на основе рубр. **19**, поскольку в этом случае длина радиуса-вектора $\overline{OP}$ остается постоянной, радиальная скорость, таким образом, равна нулю, и скорость точки P сводится к поворотной ее слагающей.

Чтобы поэтому круговое движение было равномерным [1]), необходимо и достаточно, чтобы угловая скорость $\dot\theta$ имела посто-

[1]) То есть имело постоянную скалярную скорость. (*Ред.*)

янное значение. Если тогда обозначим через ω это постоянное значение $\dot\theta$, то

$$\theta = \omega t + \theta_0,$$

где θ_0 есть аномалия точки P в момент $t=0$.

Отсюда следует, что *уравнения равномерного кругового* движения (при радиусе r и угловой скорости ω) имеют вид:

$$x = r\cos(\omega t + \theta_0), \qquad y = r\sin(\omega t + \theta_0). \tag{39}$$

В зависимости от того, имеет ли ω положительное или отрицательное значение, точка P движется в положительную сторону (в сторону возрастания аномалий) или в отрицательную. Компоненты скорости имеют значения:

$$\dot x = -r\omega\sin(\omega t + \theta_0) = -\omega y, \qquad \dot y = r\omega\cos(\omega t + \theta_0) = \omega x. \tag{40}$$

Отсюда получаем компоненты ускорения

$$\ddot x = -\omega\dot y = -\omega^2 x, \qquad \ddot y = \omega\dot x = -\omega^2 y, \tag{41}$$

откуда

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2\overline{OP};$$

это означает, что ускорение имеет постоянное напряжение $\omega^2 r$ и всегда направлено от точки P к центру круга; это находится в полном согласии с результатами, установленными в рубр. 26, так как мы имеем здесь дело с равномерным движением, а потому ускорение должно быть целиком центростремительным.

За промежуток времени $\frac{2\pi}{\omega}$ точка P всегда возвращается в то же положение с тою же скоростью и с тем же ускорением, как это следует из формул (39), (40) и (41); это выражают в словах так, что равномерное круговое движение есть *периодическое движение с периодом* $\frac{2\pi}{\omega}$.

34. Гармоническое колебание. Возвращаясь к равномерному круговому движению точки P, рассмотрим движение проекции ее на один из диаметров, например, проекции P_x точки P на ось x. В то время как точка P в своем движении делает некоторое число оборотов по окружности, точка P_x совершает столько же *колебаний* от A до B, и обратно. Прямолинейное движение точки P_x называется *гармоническим колебанием*; оно имеет очень большое значение, так как дает кинематическое отображение самого важного типа многих физических колебательных явлений (упругих, звуковых, световых), когда можно пренебречь так называемыми пассивными сопротивлениями (трением, вязкостью, сопротивлением среды и т. п.). Существуют также явления (особенно в оптике и в теории электричества, например, в теории вращающихся магнитных полей), при которых физическое значение получают как колебательное движение точки P_x, так и равномерное вращение вектора $\overline{OP}$. Заметим, далее, что всякое периодическое движение может быть разложено на большее или меньшее число — иногда даже на бесконечно большое число — гармонических колебаний.

Уравнение гармонического движения имеет вид:

$$x = r \cos (\omega t + \theta_0) \tag{39_1}$$

[первое из уравнений (39) предыдущей рубрики]; его скорость и ускорение выражаются первыми из уравнений (40) и (41), именно:

$$\dot{x} = -r\omega \sin (\omega t + \theta_0) = -\omega y, \tag{40_1}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \tag{41_1}$$

Гармоническое движение имеет ту же периодичность, что и соответствующее круговое движение; это значит, через промежуток времени $T = \frac{2\pi}{\omega}$ точка P_x всегда вновь проходит через то же положение с тою же скоростью и с тем же ускорением.

Промежуток времени T называется *периодом* гармонического колебания, а обратное число $\frac{1}{T}$ (т. е. число — целое, дробное или даже иррациональное — периодов, содержащихся в единице времени) называется *частотой* колебания; число же $\omega = \frac{2\pi}{T}$ называется *циклической* или *круговой частотой* — оно совпадает с угловой скоростью соответствующего кругового движения.

Наконец, бином $\omega t + \theta_0$ (аномалия соответствующего положения точки P) называется *фазой колебания в момент* t, а просто название *фазы* сохраняется за начальной фазой θ_0. В соответствии с этим, если сверх движения (39_1) рассматривается еще другое гармоническое движение:

$$x = r' \cos (\omega t + \theta_0'),$$

то говорят, что первое представляет по сравнению со вторым разность фаз $\theta_0 - \theta_0'$ (разность *предварения* или *отставания*, смотря по знаку). В качестве примера рассмотрим движение проекции той же точки P, совершающей круговое движение, на ось y; оно происходит по закону, выражающемуся путевым уравнением [второе из уравнений (39) предыдущей рубрики]:

$$y = r \sin (\omega t + \theta_0),$$

которому можно также придать вид:

$$y = r \cos \left(\omega t + \theta_0 - \frac{\pi}{2}\right);$$

мы можем поэтому сказать, что точка P_y, совершающая колебательное движение того же периода, что и P_x, представляет по сравнению с P_x разность фаз $-\frac{\pi}{2}$; это есть отставание на четверть периода, так как полный период соответствует разности фаз 2π.

Из предыдущего легко сделать и обратное заключение: два гармонические движения, происходящие по двум взаимно перпендикулярным прямым около точки их пересечения с одинаковым периодом и одинаковой амплитудой, но с разницей фаз в четверть периода, складываются в одно равномерное движение по окружности.

35. Из выражения (40), согласно которому скорость точки P_x при любом ее положении пропорциональна ординате соответствующей точки P, следует, что в точке A скорость колебания равна нулю и что она возрастает по абсолютной величине по мере того, как P_x приближается к *центру колебания* O, достигая в ней наибольшего напряжения ωr (фаза ускорения); затем ее напряжение уменьшается (фаза замедления) и вновь обращается в нуль в точке B; при движении же от B к A движущаяся точка имеет в каждой точке отрезка BA ту же скорость, что и при предыдущем прохождении через нее, только обращенную в противоположную сторону.

Так как, далее, соотношение (40_1) можно написать в виде:

$$\dot{x} = r\omega \cos\left(\omega t + \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

то мы можем отсюда заключить, что скорость гармонических движений, в свою очередь, совершает гармонические же колебания с предварением на квадрант, т. е. на четверть периода по отношению к перемещению x.

Ускорение (41_1) всегда *направлено к центру колебаний и пропорционально расстоянию от него точки* P_x; таким образом оно достигает наибольшего своего абсолютного значения в точках A и B и обращается в нуль в центре. Оно также совершает гармонические колебания с предварением в полпериода по отношению к x.

Отметим, наконец, что (путевые) диаграммы колебательного движения точки, ее скорости и ускорения представляют собою синусоиды.

36. Вследствие соотношения (41_1) рубр. 34 в каждом гармоническом движении с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ или, что то же, с циклической частотой ω, ускорение $\ddot{x}$ и абсцисса точки x в каждый момент связаны уравнением:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (41')$$

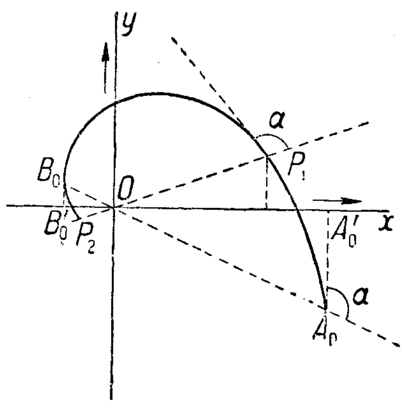
какова бы ни была амплитуда r и начальная фаза θ_0 рассматриваемого гармонического движения. Другими словами, функция от t

$$x = r\cos(\omega t + \theta_0), \qquad (39_1)$$

какие бы ни были взяты значения постоянных r и θ_0, удовлетворяет диференциальному уравнению (41′); это обыкновенное диференциальное уравнение 2-го порядка, линейное и однородное, с постоянными коэфициентами.

Но из анализа нам хорошо известно, что диференциальное уравнение 2-го порядка допускает ∞^2 решений или *частных интегралов*, т. е., что *общий интеграл* такого диференциального уравнения *зависит от двух произвольных постоянных*. Отсюда мы заключаем, что выражение (39_1) представляет собою общий интеграл уравнения $(41')$, причем r и θ_0 суть произвольные постоянные; еще иначе, это означает, что диференциальное уравнение $(41')$ определяет все *гармонические движения с периодом* $\frac{2\pi}{\omega}$ *(с произвольной амплитудой и произвольной фазой), и только эти движения.*

37. Затухающие колебательные движения. Мы уже указали выше, что гармонические движения представляют наиболее простой тип *перманентных колебательных движений*, т. е. таких, в которых движущаяся точка через равные промежутки времени (*периоды*) принимает те же геометрические и кинематические признаки. Укажем теперь здесь же наиболее простой тип *затухающих* колебательных движений, т. е. таких, последовательные амплитуды которых уменьшаются, стремясь к нулю. Этого рода движения, как первичные элементы более сложных явлений, имеют не меньшее значение, чем гармонические: они, действительно, встречаются систематически при анализе естественных движений, имеющих колебательный характер, когда нужно принять во внимание пассивные влияния.



Фиг. 42.

Мы придем к этого рода колебательным движениям, если представим себе, что радиус-вектор точки P равномерно вращается (как и при гармоническом движении) вокруг неподвижной точки O, и при этом сокращается; характером этого сокращения определяется ход затухания рассматриваемого колебания. Мы остановимся на том случае, когда при вращении радиуса-вектора конечная его точка P описывает *логарифмическую спираль* с асимптотической точкой в центре вращения O.

Займемся прежде всего изучением движения свободного конца P радиуса-вектора при определенном таким образом его вращении. По отношению к обычной системе полярных координат с полюсом в точке O уравнение логарифмической спирали, асимптотически приближающейся к точке O с возрастанием аномалий (фиг. 42), имеет вид:

$$\rho = ae^{-b\theta}, \tag{42}$$

где a и b — произвольные положительные числа, e есть основание неперовых логарифмов (2,71828...).

Если вектор $\overline{OP}$ вращается в сторону возрастающих аномалий с постоянной угловой скоростью ω, то, как обыкновенно

$$\theta = \omega t + \theta_0, \tag{43}$$

где θ_0 есть аномалия в момент $t = 0$. Если положим

$$b\omega = h, \quad ae^{-b\theta_0} = r, \tag{44}$$

то уравнения движения будут:

$$x = re^{-ht} \cos(\omega t + \theta_0), \quad y = re^{-ht} \sin(\omega t + \theta_0). \tag{45}$$

Следует отметить, что положения (44) вводят вместо постоянных a и b, имеющих чисто геометрические значения, выражения h и r, зависящие не только от a и b, но и от кинематических постоянных ω и θ_0. Соглашение о замене постоянных a и b через h и r носит чисто формальный характер, т. е. имеет в виду по возможности упростить явные выражения декартовых координат, как это видно из формул (45).

Возвратимся еще на момент к формуле (42). Двум значениям θ_1 и θ_2 аномалии θ, отличающимся на $\Delta\theta$, так что

$$\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta,$$

на логарифмической спирали отвечают радиусы-векторы ρ_1, ρ_2, отношение которых

$$q = \frac{\rho_2}{\rho_1} = e^{-b\Delta\theta};$$

вследствие первого из соотношений (44) можно также написать:

$$q = e^{-\frac{h\Delta\theta}{\omega}}. \tag{46}$$

Отсюда вытекает для логарифмической спирали вывод, что значениям аномалии θ, нарастающим в арифметической прогрессии с постоянной разностью $\Delta\theta$, соответствуют значения радиуса-вектора ρ, изменяющиеся в геометрической прогрессии, знаменатель которой связан с $\Delta\theta$ соотношением (46).

Особый интерес представляют следующие частные случаи:

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta\theta = \pi, \quad \Delta\theta = 2\pi.$$

Мы будем исходить для определенности от точки X_1 спирали, лежащей на положительной полуоси Ox. Двигаясь по спирали, начиная от точки X_1, таким образом, чтобы радиус-вектор поворачивался каждый раз на 90°, мы придем последовательно к пересечениям кривой: с положительной полуосью Oy — в точке Y_1, с продолжением полуоси Ox — в точке Ξ_1, с продолжением полуоси Oy — в точке H_1, вновь с осью Ox —

в точке X_2 и т. д. Радиусы-векторы этих пересечений убывают в геометрической прогрессии по формуле (46) в отношении

$$q = e^{-\frac{h\pi}{2\omega}}.$$

При $\Delta\theta = \pi$ мы будем иметь дело с последовательными пересечениями спирали с осью абсцисс в точках X_1, Ξ_1, X_2, $\Xi_2, \ldots$, попеременно то с одной стороны, то с другой стороны точки O; знаменателем прогрессии будет служить $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$.

Наконец, при $\Delta\theta = 2\pi$ речь идет о последовательных пересечениях кривой с положительной полуосью Ox в точках X_1, X_2, $X_3, \ldots$, причем знаменателем прогрессии, в которой будет убывать радиус-вектор, служит:

$$q = e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}.$$

Заметим, далее, что так как в движении по спирали, которое мы рассматриваем, изменение θ, ввиду (43), является равномерным, то постоянным промежуткам времени Δt соответствуют для θ интервалы $\Delta\theta = \omega\Delta t$, также постоянные. Если мы поэтому будем рассматривать моменты, отделенные друг от друга постоянным промежутком времени продолжительности Δt, то аномалии последовательных положений точки, движущейся по спирали, будут по формуле (46) убывать в постоянном отношении

$$q = e^{-h\Delta t}. \tag{46'}$$

38. Диференцируя эти уравнения по t, мы отсюда получим:

$$\dot{x} = re^{-ht}[-h\cos(\omega t + \theta_0) - \omega\sin(\omega t + \theta_0)],$$

$$\dot{y} = re^{-ht}[-h\sin(\omega t + \theta_0) + \omega\cos(\omega t + \theta_0)],$$

и, следовательно:

$$\dot{x} = -hx - \omega y, \quad \dot{y} = -hy + \omega x. \tag{47}$$

После вторичного диференцирования получим:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -h\dot{x} - \omega\dot{y} = (h^2 - \omega^2)\,x + 2h\,\omega y, \\ \ddot{y} &= -h\dot{y} + \omega\dot{x} = (h^2 - \omega)\,\,y - 2h\,\omega x. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Отсюда получаем для квадратов (скалярной) скорости и скалярного ускорения значения:

$$v^2 = (h^2 + \omega^2)\,(x^2 + y^2) = (h^2 + \omega^2)\rho^2,$$

$$a^2 = (h + \omega^2)^2\,(x^2 + y^2) = (h^2 + \omega^2)^2\rho^2.$$

Мы видим отсюда, что *скорость и ускорение точки P убывают таким же образом, как и радиус-вектор $\rho = OP$; в частности, когда t неограниченно возрастает, они стремятся к нулю, как $\rho = e^{-ht}$*; это выражение для ρ вытекает из соотношений (42), (43) и (44).

Так как, далее,

$$\frac{x}{\rho}, \ \frac{y}{\rho}$$

суть направляющие косинусы радиуса-вектора $\overline{OP}$, а вследствие предыдущего выражения для v

$$\frac{\dot{x}}{v} = \frac{\dot{x}}{\rho\sqrt{h^2+\omega^2}}, \quad \frac{\dot{y}}{v} = \frac{\dot{y}}{\rho\sqrt{h^2+\omega^2}}$$

суть направляющие косинусы скорости точки P (касательной к траектории в точке P), то угол α между этими направлениями дается выражением:

$$\cos\alpha = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{\rho^2\sqrt{h^2+\omega^2}},$$

или вследствие соотношения (47):

$$\cos\alpha = -\frac{h}{\sqrt{h^2+\omega^2}},$$

или же, еще проще,

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\omega}{h}\ ^{1)}.$$

Так как угол α оказывается *постоянным* (т. е. не зависящим от времени), то мы этим путем получаем хорошо известное свойство логарифмической спирали, что она *встречает под одним и тем же углом прямые, выходящие из асимптотической точки O.*

Через точку O проведем во втором и четвертом квадрантах осевого креста прямую OA_0, образующую с осью x угол $\alpha - \frac{\pi}{2}$; *в каждой точке пересечения A_0 этой прямой со спиралью касательная к последней будет перпендикулярна к оси x* (см. предыдущий рисунок), и других точек, обладающих этим свойством, очевидно, не будет. Для определенности предположим, что точка A_0 лежит в четвертом квадранте, и обозначим через A_1, $A_2, \ldots$ последовательные пересечения спирали с отрезком OA_0, считая от A_0 в сторону O [2]); через $B_0, B_1, B_2, \ldots$ обозначим пересечения тех же завитков с лучом, обращенным в противоположную сторону.

Из соображений, изложенных в рубр. 37, следует, что отрезки OA_0, OB_0, OA_1, $OB_1, \ldots$ образуют убывающую гео-

[1]) Нужно иметь в виду, что при принятом нами предположении спираль стремится к центру O в сторону возрастающих аномалий; поэтому угол α всегда тупой.

[2]) Продолжение отрезка OA_0 пересечет спираль в еще бесчисленном множестве других точек, которые можно было бы обозначить через A_{-1}, $A_{-2}, \ldots$; им соответствуют пересечения с теми же завитками точки B_{-1}, $B_{-2}, \ldots$ Но для определенности мы здесь рассматриваем движение точки P, начиная с момента, когда она находится в A_0.

метрическую прогрессию со знаменателем $e^{-\frac{h\pi}{\omega}} < 1$ и потому стремятся к нулю.

39. Установив все это, будем теперь совместно с движением точки P по логарифмической спирали, которое мы изучали до сих пор, рассматривать также движение ее проекции P_x на ось x. Точка P_x, очевидно, совершает колебания; если будем рассматривать движение точки P, начиная с положения A_0, то крайними точками последовательных колебаний, или *местами остановки* точки P_x, будут проекции A_0', B_0', A_1', B_1',... точек A_0, B_0, A_1, B_1,... спирали на ось x, ибо в этих точках скорость точки P всегда перпендикулярна к оси x, а потому скорость проекции равна нулю. Отрезки OA_0', OB_0', OA_1', OB_1',... (амплитуды последовательных полуколебаний), совпадающие с абсциссами последовательных пересечений A_0, B_0, A_1, B_1,... спирали с той же прямой, проходящей через начало, образуют, как мы видели в предыдущей рубрике, геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$, а поэтому стремятся к нулю; этим оправдывается название *затухающего колебательного движения*, которое присваивается движению точки P_x.

Уравнением затухающего колебательного движения будет служить первое из уравнений (45), именно:

$$x = re^{-ht} \cos(\omega t + \theta_0). \tag{45_1}$$

Так как вектор $\overline{OP}$ вращается равномерно, то совершенно ясно, что между двумя последовательными прохождениями точки P_x через полюс O протекает промежуток времени *постоянной продолжительности* $\frac{\pi}{\omega}$ (необходимой для того, чтобы увеличить на π аномалию $\omega t + \theta_0$ точки P) и что $\frac{\pi}{\omega}$ представляет собою постоянную продолжительность каждого *простого колебания*, протекающего между последовательными положениями A_0 и B_0, B_0 и A_1 и т. д. [1]). Поэтому будет также постоянной и равной $T = \frac{2\pi}{\omega}$ и продолжительность каждого *полного* колебания (от A_0' до A_1', от B_0' до B_1', от A_1' до A_2' и т. д.). Эта постоянная продолжительность полных колебаний называется

[1]) Нужно заметить, между прочим, что интервал простого колебания, скажем, например, A_i' B_i', не делится моментом прохождения точки через полюс O пополам. Это становится очевидным, если заметим, что при равномерном вращении вектора $\overline{OP}$ аномалии, соответствующие положениям A_i' и B_i', сравнимы по модулю 2π соответственно с $\alpha - \frac{\pi}{2}$ и с $\alpha + \frac{\pi}{2}$, тогда как аномалии в точке O всегда сравнимы с $\frac{\pi}{2}$.

периодом затухающих колебаний, хотя совершенно ясно, что это движение не носит периодического характера (помимо постоянства продолжительности колебания).

Чтобы точнее выразить кинематические изменения, которые происходят в движении точки P_x за период $T=\frac{2\pi}{\omega}$, обратимся вновь к точке P; припомним, что за промежуток $\frac{\pi}{\omega}$, т. е. за *полупериод* $\frac{T}{2}$, как координаты точки P, так и компоненты ее скорости и ускорения меняют знак, абсолютное же их значение убывает пропорционально в отношении $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$. Если примем во внимание, что P_x есть проекция точки P на ось абсцисс и что ее скоростью и ускорением служат проекции на ту же ось скорости и ускорения точки P, и объединим эффект, происходящий в течение двух последовательных полупериодов, т. е. в течение полного периода $T=\frac{2\pi}{\omega}$, то мы придем к заключению, что за *промежуток времени* $T=\frac{2\pi}{\omega}$ *расстояние точки* P_x *от полюса, а также соответствующие скорость и ускорение пропорционально снижаются (без изменения знака) в отношении* $e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}$ *по сравнению с первоначальным их значением.*

Таким образом каждый промежуток времени T приносит с собою, так сказать, сокращение (затухание) всех характерных элементов движения в отношении $e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}$.

Как абсциссы, так и скорости и ускорения точки P_x, вычисленные для последовательных моментов, следующих друг за другом через промежутки в период или полупериод, образуют *убывающие геометрические прогрессии*, соответственно со знаменателями $e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}$ или $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$; натуральные логарифмы их образуют *арифметические прогрессии* с разностью соответственно $-\frac{2h\pi}{\omega}$ и $-\frac{h\pi}{\omega}$. Поэтому число $\frac{h\pi}{\omega}$ называется *логарифмическим декрементом этого колебательного движения* (относительно полупериода). Чем меньше декремент, тем менее заметно затухание, так как тем ближе становятся к единице коэфициенты сокращения $e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}$ и $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$. Если $\frac{h\pi}{\omega}=0$, т. е. если $h=0$, то затухающее колебательное движение обращается в гармоническое колебание, как это непосредственно усматривается из уравнения (45_1). Заметим, наконец, что логарифмический декремент можно также представить в виде:

$$\frac{h\pi}{\omega}=\frac{hT}{2},$$

откуда следует также, что

$$e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}=e^{-hT}.$$

40. Если фиксируем некоторый момент $t=t_1$, то движение, определяемое уравнением

$$x=re^{-ht_1}\cos(\omega t+\theta_0),$$

называется по отношению к затухающему движению (44_1) *тангенциальным гармоническим движением* [1]), соответствующим моменту t_1.

Ясно, что такое движение проекции P_x точки P на ось абсцисс имело бы место, если бы точка P с момента t_1 стала двигаться не по спирали, а по окружности, и притом равномерно с угловой скоростью ω. Этим тангенциальным гармоническим движением особенно удобно пользоваться, когда h очень мало, так как в течение нескольких периодов показательная функция e^{-ht} сохраняет приблизительно постоянное значение, которое можно считать равным e^{-ht_1}. Когда это имеет место, в показателе можно пренебречь произведением hT, даже умноженным на целое число n, соответствующее нескольким оборотам. В интервале от t_1-nT до t_1+nT всякий момент t можно представить в виде $t=t_1+\alpha nT$, где α — правильная дробь (положительная или отрицательная); вместе с тем

$$re^{-ht}=re^{-ht_1-\alpha nhT},$$

а так как числом $-\alpha nhT$ можно пренебречь, то

$$re^{-ht}=re^{-ht_1}=\text{const}.$$

Поскольку e^{-ht} можно на протяжении нескольких колебаний заменить через e^{-ht_1}, постольку затухающее движение можно в течение этого промежутка времени считать совпадающим с соответствующим тангенциальным его приближением; как велик промежуток, на котором такую замену можно делать с достаточным приближением, об этом можно судить только в каждом отдельном случае.

В выражении амплитуды re^{-ht} тангенциального гармонического движения, соответствующего произвольно взятому моменту t, показатель $-ht$ выявляет затухание; поэтому число h назы-

[1]) Подобно тому как касательная (тангенциальная прямая) есть прямая, имеющая с кривой в данной точке то же направление, так тангенциальное движение есть такое *гармоническое* движение, состояние которого в рассматриваемый момент совпадает с состоянием действительного движения. (*Ред.*)

вается *постоянной затухания*. Из предыдущего следует, что затухание нужно считать малым, когда оказывается незначительным (т. е. меньше обратного значения $\frac{1}{n}$ достаточно большого целого числа n) произведение hT. Обратное значение $\frac{1}{h}$ числа h называется временем *падения колебания*; оно выражает время, в течение которого амплитуда соответствующего тангенциального гармонического движения уменьшается в отношении 1 к $\frac{1}{e}$; в самом деле

$$re^{-h\left(t+\frac{1}{h}\right)} = \frac{1}{e}\, re^{-ht}.$$

41. Теоретически затухающие колебания не угасают никогда. Но на практике, если возьмем такое положительное число τ, при котором произведением $h\tau$ уже можно пренебречь[1]), то достаточно будет взять $t > \frac{1}{\tau}$, чтобы можно было пренебречь расстоянием движущейся точки от полюса O. Таким образом, на практике с момента $t = \frac{1}{\tau}$ точку P можно будет считать уже неподвижной (относительно осей координации).

42. Возвратимся к последним уравнениям (47) рубр. 37.

$$\dot{x} = -hx - \omega y, \quad \dot{y} = -hy + \omega x. \tag{47}$$

Исключая отсюда y, получим:

$$\omega\dot{y} = h\dot{x} + (h^2 + \omega^2)\, x.$$

Если теперь продиференцируем первое из уравнений (47) и в полученное уравнение

$$\ddot{x} = -h\dot{x} - \omega\dot{y}$$

подставим найденное сейчас выражение для $\omega\dot{y}$, то получим уравнение:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + (h^2 + \omega^2)\, x = 0, \tag{49}$$

которое связывает абсциссу, скорость и ускорение обычного нашего затухающего колебательного движения:

$$x = re^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0). \tag{45$_1$}$$

Эта функция времени удовлетворяет диференциальному уравнению (49); а так как это уравнение 2-го порядка, то выражение (45_1) представляет собою его общий интеграл *с произволь-*

---

[1]) В том смысле, что оно дает неразличимые при помощи наших инструментов результаты. (*Ред.*)

ными постоянными r и θ_0. Иными словами, *линейное однородное диференциальное уравнение 2-го порядка:*

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + (h^2 + \omega^2)\,x = 0,$$

где h *и* ω *суть два данных положительных числа, определяет все затухающие колебательные движения с периодом* $\frac{2\pi}{\omega}$ *и постоянной затухания* h.

Как этого и следовало ожидать, при $h = 0$ уравнение (49) обращается в диференциальное уравнение (41′) гармонического движения (рубр. 36).

43. Движения, определяемые однородным линейным диференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэфициентами. Следуя указанию, к которому, естественно, приводят предыдущие результаты, поставим себе теперь обратную задачу — исследовать вообще все те движения, при которых между абсциссой (криволинейной, если движение не прямолинейное), скоростью (скалярной) и ускорением (касательным) существует соотношение, выражаемое линейным однородным диференциальным уравнением с постоянными коэфициентами:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = 0. \tag{50}$$

Этого рода движения постоянно встречаются в различного рода вопросах механики и физики.

Начнем с того, что возобновим в памяти некоторые основные теоремы анализа, относящиеся к этого рода уравнениям. Диференциальное уравнение 2-го порядка, линейное и однородное относительно неизвестной функции x от независимой переменной t, всегда допускает два решения: $x_1(t)$ и $x_2(t)$, линейно независимые, т. е. такие, отношение которых не сводится к постоянному числу; общий интеграл уравнения выражается в этом случае суммой:

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t),$$

где c_1 и c_2 суть произвольные постоянные.

Если такое уравнение имеет постоянные коэфициенты, как в случае (50), мы ищем решение вида $e^{\varepsilon t}$, где ε означает постоянную; если это выражение подставим в уравнение (50), то оно принимает вид:

$$e^{\varepsilon t}\,(\varepsilon^2 + 2h\varepsilon + k) = 0;$$

откуда следует, что постоянная ε должна удовлетворять алгебраическому уравнению 2-й степени:

$$\varepsilon^2 + 2h\varepsilon + k = 0. \tag{51}$$

Если это уравнение имеет два различные корня ε_1 и ε_2, т. е. если $h^2 \neq k$, то мы, таким образом, получаем два частных решения $e^{\varepsilon_1 t}$ и $e^{\varepsilon_2 t}$, так что общий интеграл выражается суммой

$$c_1e^{\varepsilon_1 t} + c_2e^{\varepsilon_2 t}. \tag{52}$$

Если же, напротив $h^2=k$, так что уравнение (51) имеет двойной корень $-h$, то этим путем мы находим только одно частное решение e^{-ht}; но мы очень легко обнаруживаем непосредственной подстановкой, что в этом случае уравнение удовлетворяет также выражению te^{-ht} так что общий интеграл в этом случае имеет вид:

$$(c_1+c_2t)\, e^{-ht} \tag{53}$$

44. Установив все это, займемся исследованием движений, определяемых уравнением (50); и прежде всего разберем случай $h=0$, который очень часто встречается, как мы в этом убедимся впоследствии, особенно при исследовании наиболее элементарных проблем устойчивости движения.

Если не только h, но и k обращается в нуль, то уравнение (50) принимает вид $\ddot{x}=0$ и выражает совокупность ∞^2 равномерных движений. Если $k>0$, то мы можем положить $k=\omega^2$ и вновь приходим к уравнению:

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0,$$

характеризующему гармонические движения (рубр. 36).

Остается случай $k<0$; полагая тогда $k=-\omega^2$, мы приведем уравнение (49) к виду:

$$\ddot{x}-\omega^2 x=0;$$

соответствующее характеристическое уравнение $\varepsilon^2-\omega^2=0$ допускает в этом случае два противоположные корня $\pm\omega$; общий интеграл диференциального уравнения принимает поэтому вид:

$$x=c_1e^{\omega t}+c_2e^{-\omega t}. \tag{52'}$$

Для движения, определяемого путевым уравнением этого вида, скорость выражается формулой:

$$\dot{x}=\omega\left(c_1e^{\omega t}-c_2e^{-\omega t}\right)=\omega e^{-\omega t}\left(c_1e^{2\omega t}-c_2\right).$$

В этом выражении производной $\dot{x}$ множитель $e^{-\omega t}$ при всяком конечном t имеет положительное значение, отличное от нуля; выражение же, стоящее в скобках, производная которого $2c_1\omega e^{2\omega t}$ с изменением t никогда не меняет своего знака, постоянно возрастает или постоянно убывает; поэтому оно может обратиться в нуль не более одного раза. Это имеет место при условии $c_1\neq 0$ и $c_2/c_1>0$ для значения

$$t=\frac{1}{2\omega}\ln\frac{c_2}{c_1}$$

В рассматриваемом случае скорость в этот момент обращается в нуль и меняет знак, т. е. сторона, в которую обращено движение, изменяется: точка после остановки движется в обратную сторону.

Формула (52) показывает, что при $t \to \infty$ x стремится к бесконечности того же знака, что и c_1, если $c_1 \neq 0$, и к нулю, если $c_1 = 0$; при $t \to -\infty$ c_1 стремится к бесконечности знака c_2, если $c_2 \neq 0$, и к нулю, если $c_2 = 0$. Таким образом в общем случае (т. е. при $c_1 c_2 \neq 0$) движущаяся точка идет из бесконечности и вновь удаляется в бесконечность, либо меняя при этом сторону, в которую движение обращено, либо не меняя ее. В частных же случаях при $c_1 = 0$ или $c_2 = 0$ точка приходит с бесконечно удаленного расстояния и неограниченно приближается к началу (*асимптотическое затухание*); или же выходит из окрестности, непосредственно примыкающей к началу, и уходит на неограниченно большое расстояние; в том и другом случае сторона, в которую движение обращено, при этом не меняется.

Таким образом, при $k < 0$ мы всегда имеем дело с *непериодическим движением.*

45. Исчерпав, таким образом, случай $h = 0$, обратимся к общему случаю, когда $h \neq 0$. Прежде всего, остановимся на тех движениях, которые соответствуют отрицательным значениям h. Если положим $h = -h_1$, то уравнение примет вид:

$$\ddot{x} - 2h_1\dot{x} + hx = 0. \tag{50'}$$

Теперь произведем преобразование независимой переменной, полагая

$$t_1 = -t.$$

Так как при этом

$$\dot{x} = -\frac{dx}{dt_1} \quad \text{и} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt_1^2},$$

то преобразованное уравнение примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt_1} + 2h_1\frac{dx}{dt_1} + kx = 0, \tag{50''}$$

в котором коэфициент при $\frac{dx}{dt_1}$ имеет положительное значение. Общий интеграл уравнения (50′) получим, заменив в интеграле уравнения (50″) t_1 через $-t$; интерпретируя это кинематически, можно сказать, что каждое движение, определяемое уравнением (50′), получается, если в некотором движении, определяемом уравнением (50″), обратим естественную последовательность моментов времени (*обращенное движение*). Вследствие этого, в конечном счете, желая исследовать все возможные движения вида (50), достаточно будет подвергнуть непосредственному изучению случай $h > 0$, а затем для каждого полученного таким путем движения необходимо будет рассмотреть также соответствующее обращенное движение.

46. Однако, и в этом исследовании нам придется рассмотреть отдельно три случая в зависимости от того, будет ли $h^2 < k$, $h^2 > k$ или $h^2 = k$.

А) $h^2 < k$ (что предполагает $k > 0$).

Если в этих предположениях положим

$$k - h^2 = \omega^2,$$

то уравнение (50) примет вид:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + (h^2 + \omega^2)\,x = 0.$$

Мы уже знаем (рубр. 42), что это диференциальное уравнение характеризует при $h > 0$ затухающие колебательные движения с постоянной затухания h и периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Случай $h < 0$, который здесь является новым, соответствует обращенным движениям затухающих колебаний, которые можно назвать *развертывающимися колебаниями.*

Впрочем нетрудно непосредственно получить путевые урав нения этих различных движений, исходя из общих положений, приведенных в рубр. 43. При условии $h^2 < k$ оба корня ε_1 и ε_2 уравнения (51) будут комплексными (при любом h) и именно

$$\varepsilon_1 = -h + \omega i, \quad \varepsilon_2 = -h - \omega i,$$

где i, по обыкновению, означает мнимую единицу. Поэтому оказываются сопряженно комплексными и два частные решения:

$$e^{\varepsilon_1 t} = e^{-ht}\,e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad e^{\varepsilon_2 t} = e^{-ht}\,e^{-i\omega t},$$

линейная комбинация которых с произвольными постоянными коэфициентами дает общий интеграл диференциального уравнения рассматриваемых движений. Но так как путевые уравнения движения непременно должны быть вещественными, то этими коэфициентами нужно распорядиться таким образом, чтобы упомянутая линейная комбинация была вещественной. Для этой цели им достаточно приписать сопряженные комплексные значения, т. е. положить:

$$c_1 = \frac{1}{2}\,re^{i\theta_0}, \quad c_2 = \frac{1}{2}\,re^{-i\theta_0},$$

где r и θ_0 суть произвольные вещественные числа. Тогда общий интеграл примет вид:

$$x = \frac{1}{2}\,re^{-ht}\left\{e^{i(\omega t + \theta_0)} + e^{-i(\omega t + \theta_0)}\right\},$$

т. е. по известной формуле Эйлера [1]:

$$x = re^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0);$$

---

[1] Леонард Эйлер (Leonard Euler) родился в Базеле в 1707 г., умер в Петербурге в 1783 г., был директором сначала Берлинской, а затем Петербургской академии наук. Эйлер был одним из самых плодотворных математиков всех времен не только в области чистого анализа, но и в его приложениях к математике, механике и к весьма разнообразным вопросам техники.

это путевое уравнение, совпадающее при $h>0$ с уравнениями затухающих колебаний, дает при $h<0$ путевое уравнение развертывающихся колебаний.

В) $h^2>k$.

При этом предположении алгебраическое уравнение (51) имеет два различные вещественные корня:

$$\varepsilon_1=-h+\sqrt{h^2-k}, \quad \varepsilon_2=-h-\sqrt{h^2-k},$$

а следовательно, общий интеграл диференциального уравнения дается непосредственно в вещественном виде линейной комбинацией:

$$x=c_1e^{\varepsilon_1 t}+c_2e^{\varepsilon_2 t} \tag{52}$$

с вещественными коэфициентами c_1 и c_2. Соображения, совершенно аналогичные тем, которые сделаны в рубр. 44, обнаруживают, что всякое движение, определяемое путевым уравнением этого типа, необходимо является *апериодическим*. Сторона, в которую движение обращено, при этом меняется не более одного раза; это происходит в момент

$$t=\frac{1}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}\ln\left(-\frac{c_2\,\varepsilon_2}{c_1\,\varepsilon_1}\right)$$

при условиях $c_1\varepsilon_1\neq 0$, $c_2\varepsilon_2/c_1\varepsilon_1<0$.

Чтобы с большею точностью представить ход этого движения, целесообразно различать здесь ряд отдельных случаев. Принимая, как мы это установили в предыдущей рубрике, $h>0$, заметим, что с этим положением (в связи с исходным $h^2>k$) совместимы три случая: $k>0$, $k<0$ и $k=0$.

Если $h^2>k$, $h>0$, $k>0$ — это случай, наиболее интересный по своим физическим приложениям,— то оба корня уравнения (51) будут отрицательными, и при этом $\varepsilon_1>\varepsilon_2$. При этих условиях, представив выражение (52) в виде:

$$x=\left(c_1e^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)t}+c_2\right)e^{\varepsilon_2 t},$$

легко убеждаемся, что при $t\to-\infty$ x стремится к бесконечности (имеющей знак числа c_2, если $c_2\neq 0$, и знак числа c_1, если $c_2=0$). Таким образом в этом случае движущаяся точка всегда приходит из бесконечности (меняя сторону, в которую обращено движение, или не меняя ее) и стремится к определенному положению на конечном расстоянии (*асимптотическое затухание движения*).

Если $h^2>k$, $h>0$, а $k<0$, то корни ε_1 и ε_2 имеют противоположные знаки, и именно $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2<0$. В этом случае выражение (52) непосредственно обнаруживает, что при $t\to+\infty$ x стремится к бесконечности знака числа c_1, если $c_1\neq 0$, и к нулю, если $c_1=0$. При $t\to-\infty$ x стремится к бесконечности знака c_2, если $c_2\neq 0$, и к нулю, если $c_2=0$. Таким образом в рассматриваемых условиях точка вообще (т. е. при $c_1c_2\neq 0$) приходит из бесконечности и уходит в бесконечность в ту же сторону, откуда пришла, или же в обратную сторону (т. е. меняя на пути сторону движения или не меняя ее); в частности, однако, при $c_1 = 0$ или $c_2 = 0$ движение либо приводит точку из бесконечности и асимптотически затухает у некоторой определенной точки траектории, либо же из непосредственной близости к некоторой определенной точке уводит ее в бесконечность.

Наконец, если $h > 0$, а $k = 0$ (требование $h^2 > k$ при этом удовлетворяется само собой), то

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = -2h;$$

общий интеграл имеет вид:

$$x = c_1 + c_2 e^{-2ht},$$

и мы видим непосредственно, что (за исключением случая $c_2 = 0$, приводящего к покою) движущаяся точка приходит из бесконечности знака c_2 и асимптотически приближается к положению, соответствующему абсциссе c_1.

При $h < 0$ (и, конечно, $h^2 > k$) мы получаем обратные движения рассмотренных сейчас типов, и возвращаться к ним бесполезно.

C) $h^2 = k$, что уже влечет за собою $k > 0$, за исключением исчерпанного уже случая $h = k = 0$.

Это положение можно рассматривать как предельный случай положения B, уже рассмотренного выше; и отсюда уже можно предусмотреть, что мы имеем здесь дело с непериодическими движениями. Чтобы установить это непосредственно, заметим, что путевое уравнение в этом случае имеет вид (рубр. 42):

$$x = (c_1 + c_2 t)\, e^{-ht}; \qquad (53)$$

поэтому скорость выражается формулой:

$$\dot{x} = (c_2 - hc_1 - hc_2 t)\, e^{-ht},$$

из которой видно, что при $c_2 = 0$ (или, конечно, при $h = 0$) она вовсе не обращается в нуль, а при $c_2 \neq 0$ и $h \neq 0$ она обращается в нуль только один раз при

$$t = \frac{c_2 - hc_1}{hc_2}.$$

Что касается хода движения в далеком прошлом или в отдаленном будущем, то при $h > 0$, как видно из формулы (53), при $t \to -\infty$ x стремится к бесконечности со знаком числа $-c_2$, если $c_2 \neq 0$, и со знаком c_1, если $c_2 = 0$; применяя же к выражению (53) правило де-Лопиталя [1]), находим, что во всяком случае

$$\lim_{t \to \infty} x = -\lim_{t \to \infty} hc_2 e^{-ht} = 0.$$

---

[1]) Вильгельм Франциск де-Лопиталь (G. F. de l'Hopital, часто пишут Hôpital) родился в Париже в 1661 г. и там же умер в 1704 г. В молодости он был кавалерийским офицером, но затем отдался всецело научным занятиям и до-

Таким образом, мы при этих условиях всегда имеем апериодическое движение, причем движущаяся точка приходит из бесконечности и асимптотически приближается к началу, изменив не более одного раза сторону, в которую движение обращено.

При $h < 0$ получаются движения, обращенные по сравнению с теми, которые только что были рассмотрены.

8. Центральные движения. Кеплеровы движения.

47. Движение точки называется *центральным*, если прямая действия ускорения во всякий момент (конечно, когда это имеет смысл, т. е. когда оно отлично от нуля) проходит через постоянную точку O, называемую *центром движения*.

Иначе, это определение выражает, что радиус-вектор $\overline{OP}$ и ускорение a коллинеарны, так что момент ускорения относительно точки O $[\overline{OP}a]$ равен нулю.

И, обратно, если оказывается, что векторное произведение $[\overline{OP}a]=0$, то движение является центральным. Мы знаем, в самом деле, из теории векторов, что момент вектора a, приложенного в точке P, относительно точки O, равен нулю, либо когда сам вектор a равен нулю, либо когда он проходит через точку O. Таким образом, *векторная характеристика центрального движения* заключается в том, что во все время движения

$$[\overline{OP}a]=0. \tag{54}$$

48. Из соотношения (54) непосредственно следует, что *вектор секториальной скорости всякого центрального движения относительно центра движения O является постоянным.*

В самом деле, припомним, что секториальная скорость движения относительно центра O отличается только множителем $\frac{1}{2}$ от векторного произведения $[\overline{OP}v]$. С другой стороны, диференцируя это произведение по времени, получим:

$$\frac{d}{dt}[\overline{OP}v]=[\dot{\overline{OP}}v]+[\overline{OP}\dot{v}].$$

Так как, далее (I, рубр. 65 и II, рубр. 13)

$$\dot{\overline{OP}}=\dot{P}=v,$$

то

$$[\dot{\overline{OP}}v]=[v\ v]=0,$$

стиг звания члена Парижской академии наук. Сочинение, в котором содержится правило, носящее его имя, было в первый раз опубликовано в Париже в 1696 г. и носит название „Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes“ („Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий“).