Таким образом, мы при этих условиях всегда имеем апериодическое движение, причем движущаяся точка приходит из бесконечности и асимптотически приближается к началу, изменив не более одного раза сторону, в которую движение обращено.

При $h < 0$ получаются движения, обращенные по сравнению с теми, которые только что были рассмотрены.

8. Центральные движения. Кеплеровы движения.

47. Движение точки называется *центральным*, если прямая действия ускорения во всякий момент (конечно, когда это имеет смысл, т. е. когда оно отлично от нуля) проходит через постоянную точку O, называемую *центром движения*.

Иначе, это определение выражает, что радиус-вектор $\overline{OP}$ и ускорение a коллинеарны, так что момент ускорения относительно точки O $[\overline{OP}a]$ равен нулю.

И, обратно, если оказывается, что векторное произведение $[\overline{OP}a]=0$, то движение является центральным. Мы знаем, в самом деле, из теории векторов, что момент вектора a, приложенного в точке P, относительно точки O, равен нулю, либо когда сам вектор a равен нулю, либо когда он проходит через точку O. Таким образом, *векторная характеристика центрального движения* заключается в том, что во все время движения

$$[\overline{OP}a]=0. \tag{54}$$

48. Из соотношения (54) непосредственно следует, что *вектор секториальной скорости всякого центрального движения относительно центра движения O является постоянным.*

В самом деле, припомним, что секториальная скорость движения относительно центра O отличается только множителем $\frac{1}{2}$ от векторного произведения $[\overline{OP}v]$. С другой стороны, диференцируя это произведение по времени, получим:

$$\frac{d}{dt}[\overline{OP}v]=[\dot{\overline{OP}}v]+[\overline{OP}\dot{v}].$$

Так как, далее (I, рубр. 65 и II, рубр. 13)

$$\dot{\overline{OP}}=\dot{P}=v,$$

то

$$[\dot{\overline{OP}}v]=[v\ v]=0,$$

стиг звания члена Парижской академии наук. Сочинение, в котором содержится правило, носящее его имя, было в первый раз опубликовано в Париже в 1696 г. и носит название „Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" („Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий").

а потому
$$\frac{d}{dt}[\overline{OP}v] = [\overline{OP}\dot{v}] = [\overline{OP}a]; \tag{55}$$

эта производная обращается, следовательно, для центрального движения в нуль. Отсюда следует, что
$$[\overline{OP}v] = c, \tag{56}$$

где c — вектор постоянный по величине и положению, — двойной вектор секториальной скорости центрального движения.

Можно прибавить, что *уравнение* (56) *так же, как и* (54), *является характерным для центральных движений.*

В самом деле, мы уже показали, что уравнение (56) представляет собой следствие определяющего центральное движение соотношения (54). Обратно, если имеет место соотношение (56), то, диференцируя его и учитывая тождество (55), получим соотношение (54).

Рассмотрим еще, в частности, длину момента $[\overline{OP}v]$. Эту длину можно выразить произведением v (величины или напряжения скорости) на расстояние точки O от прямой действия вектора v. Вследствие этого постоянство произведения $[\overline{OP}v]$ приводит к следующему предложению.

Во всяком центральном движении произведение напряжения скорости на расстояние касательной к траектории от центра остается постоянным во все время движения.

49. Очень важно отметить, что *всякое центральное движение представляет собой движение плоское.*

Это вытекает непосредственно из соотношения (56). В самом деле, рассмотрим сначала общий случай, когда постоянный вектор c отличен от нуля. Из соотношения (56) в этом случае следует, что вектор $\overline{OP}$ остается перпендикулярным к c. Движущаяся точка P остается в плоскости, проходящей через центр движения O перпендикулярно к c.

50. Остается, таким образом, исследовать частный случай, когда вектор c обращается в нуль. Мы можем при этом, конечно, исключить тривиальное предположение, что и вектор $\overline{OP}$ тождественно обращается в нуль; точка оставалась бы тогда неподвижной в точке O. Мы обратимся поэтому к интервалу, в течение которого $\overline{OP}$ остается отличным от нуля. Если, положим, $\overline{OP} = \rho u$, где u есть версор вектора $\overline{OP}$, а ρ выражает расстояние OP, то соотношение (56) в рассматриваемом случае, т. е. при $c = 0$, устанавливает, что скорость v (если не обращается в нуль) параллельна вектору $\overline{OP}$. Мы можем поэтому положить:
$$v = \sigma\overline{OP} = \sigma\rho u,$$

где σ есть скаляр, который, вообще, как и ρ, представляет собою функцию времени. Так как вектор v представляет собою производную $\overline{\dot{OP}}$, то последнее равенство можно написать в виде:

$$\dot{\rho} u + \rho \dot{u} = \rho \sigma u.$$

С другой стороны, вектор $\dot{u}$ должен быть либо перпендикулярен к u (рубр. 61), либо равен нулю. Первое предположение, однако, исключается; в самом деле, умножая обе части последнего равенства скалярно на $\dot{u}$, мы получили бы $\rho \dot{u}^2 = 0$ и, следовательно, $\rho = 0$. Поэтому нужно принять, что $\dot{u} = 0$, т. е. что u есть постоянный версор; равенство $\overline{OP} = \rho u$ обнаруживает, что движение является прямолинейным (частный случай плоского движения)[1].

51. Так как центральные движения принадлежат к плоским, то целесообразно их формально характеризовать, оставаясь в плоскости движения и принимая ее за плоскость Oxy. Тогда z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$ обращается в нуль, а вектор $[\overline{OP} a]$ имеет две компоненты (по осям x и y), равные нулю, каково бы ни было движение в плоскости x, y; третья же компонента (по оси z) имеет значение $x\ddot{y} - y\ddot{x}$. Отсюда следует, что для нашего центрального движения, в силу соотношения (54), имеет место диференциальное уравнение:

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0; \tag{54'}$$

оно характеризует центральное движение. Но, так как мы имеем тождественно

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

то это условие (54′) можно заменить эквивалентным ему:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \text{const.}, \tag{56'}$$

которое выражает (рубр. 20) постоянство секториальной скорости и непосредственно проистекает (проекция на ось z) из соотношения (56).

52. Радиальное и трансверсальное (поперечное) ускорения в плоском движении. Чтобы легче исследовать одну важную категорию центральных движений, выведем, прежде всего, для любого плоского движения, отнесенного к полярным координатам

---

[1]) Может быть проще будет следующее доказательство этого случая. Так как ускорение a направлено по прямой $\overline{OP}$, то при $[\overline{OP}\, v] = 0$ и $[av] = 0$. С другой стороны, по общей формуле рубр. 26:

$$a = \ddot{s} t + v^2 \sigma n,$$

где σ — кривизна траектории в соответствующей точке. Умножая обе части этого равенства векторно на v и принимая во внимание, что $[tv]$ всегда равно нулю, получим $v^2 \sigma [nv] = 0$. Но произведение двух взаимно перпендикулярных векторов v и n при $v \neq 0$ не может обратиться в нуль; поэтому на всем протяжении траектории $\sigma = 0$, т. е. движение прямолинейное. (*Ред.*)

(рубр. 19), выражения радиального и трансверсального ускорений, т. е. компоненты ускорения a_ρ и a_θ по ориентированному направлению $\overline{OP}$ и по перпендикулярному к $\overline{OP}$ направлению, ориентированному относительно OP так, как ось y ориентирована относительно оси x.

Так как направляющие косинусы этих направлений соответственно суть

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}, \quad -\sin\theta = -\frac{y}{\rho}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\rho},$$

то мы будем иметь, прежде всего:

$$a_\rho = \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y}}{\rho}, \quad a_\theta = \frac{x\ddot{y} - y\ddot{x}}{\rho}.$$

Чтобы выразить a_ρ в функции от $\rho\theta$ и их производных, будем исходить из основного соотношения:

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Продиференцировав его два раза по времени, получим:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \rho\ddot{\rho} + \dot{\rho}^2;$$

а так как [рубр. 19, формула (19)]

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2,$$

то

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = \rho\ddot{\rho} - \rho^2\dot{\theta}^2;$$

отсюда мы и получаем для радиального ускорения выражение:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2. \tag{57'}$$

Что касается a_θ, то припомним (рубр. 20), что

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2\dot{\theta}.$$

Замечая поэтому, что

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}), \tag{58}$$

находим:

$$a_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}), \tag{57'}$$

или в раскрытом виде:

$$a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}. \tag{58'}$$

Отметим, что в случае кругового движения вокруг точки O ($\rho = \text{const.}$) соотношения (57) и (58) принимают вид:

$$a_\rho = -\rho\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = \rho\ddot{\theta}. \tag{58''}$$

Это тангенциальное и нормальное ускорения рубр. 26 для кругового движения с тою разницей, что первое рассчитано в центробежном направлении (от O к P), а не в центростремительном (от P к O); это и выражается знаком минус в первом из равенств (58″), так как ускорение направлено к центру.

53. Формула Бине. Применим теперь формулы (57) и (58) к центральным движениям. По самому своему определению центральное движение характеризуется тем, что поворотное ускорение a_θ относительно некоторой определенной точки O (центра движения) обращается в нуль; поэтому диференциальная характеристика этих движений в полярных координатах выражается так:

$$2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}=0,$$

а это, как оно и естественно, устанавливает только, что $\rho^2\dot{\theta}$ (двойное значение секториальной скорости) имеет постоянное значение.

Полагая соответственно этому

$$\rho^2\dot{\theta}=c, \tag{59}$$

можно дать радиальному ускорению a_ρ (которое в рассматриваемом случае центрального движения дает по абсолютному значению все скалярное ускорение точки) чисто геометрическое выражение, т. е. такое, которое вовсе не содержит производных от ρ и θ по времени; для этого необходимо воспользоваться только уравнением траектории в полярных координатах $\rho=\rho(\theta)$. Вследствие этого уравнения можно считать, что радиус-вектор ρ зависит от t через посредство θ, т. е. ρ становится функцией от t благодаря тому, что θ есть функция от t. Таким образом мы получаем

$$\dot{\rho}=\frac{d\rho}{d\theta}\dot{\theta};$$

исключая же отсюда $\dot{\theta}$ при посредстве соотношения (59), находим:

$$\dot{\rho}=\frac{c}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}=-c\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\theta}.$$

Рассматривая теперь опять вторую часть этого равенства как функцию от t, составленную через посредство θ, будем его вновь диференцировать по t и на основании соотношения (59) положим затем $\dot{\theta}=\frac{c}{\rho^2}$; мы получим:

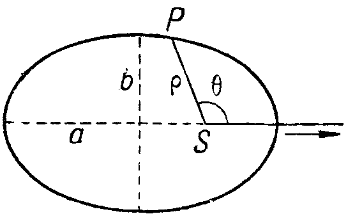
$$\ddot{\rho}=-\frac{c^2}{\rho^2}\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}.$$

Подставляя это выражение для ρ в формулу (57) и снова исключая θ при помощи соотношения (59), мы получим требуемое выражение радиального ускорения:

$$a_\rho = -\frac{c^2}{\rho^2}\left\{\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}\right\}; \tag{60}$$

оно носит название формулы Бине [1]), хотя оно было раньше известно еще Ньютону [2]).

54. Кеплерово движение. Одним из наиболее интересных центральных движений является вращение планет вокруг солнца.



Фиг. 43.

Такого рода движение называют *кеплеровым*, так как законы его были впервые формулированы Кеплером [3]).

Как известно, законы *Кеплера* заключаются в следующем:

1. Орбитами планет служат эллипсы, в одном из фокусов которых находится солнце.

2. Площади, описанные радиусом-вектором, идущим от солнца к планете, пропорциональны временам, в которые они были пройдены.

3. Квадраты времен, в течение которых различные планеты пробегают свои орбиты (времен их обращения), пропорциональны кубам больших осей этих орбит.

---

[1]) Яков Бине (Jacques Binet) родился в Ренне в 1786 г., умер в Париже в 1856 г., был преподавателем астрономии в Collège de France.

[2]) Исаак Ньютон (Isaac Newton) родился в деревне Линкольнского графства в 1642 г. (год смерти Галилея), умер в предместьи Лондона в 1727 г. Здесь достаточно упомянуть о его сочинении „Philosophiae naturalis principia mathematica" („Математические начала философии естествознания"), выпущенном в первый раз в Лондоне в 1687 г. В этом сочинении изложены в форме, быстро сделавшейся классической, основы теоретической механики и математической физики, а также некоторые великие их следствия. Чтобы получить возможность развернуть эти дисциплины, Ньютон создал необходимые для этого математические средства — по существу исчисление бесконечно-малых. Он разделяет с Кавальери и Лейбницем заслугу открытия диференциального и интегрального исчислений; удачная символика диференциалов сохранившаяся по настоящее время, принадлежит, впрочем, Лейбницу. Ньютона считают величайшим гением в области точного естествознания, из всех когда-либо существовавших. Эпиграф на его могиле в Вестминстерском аббатстве в Лондоне заканчивается словами: „Sibi gratulentur Mortales tale tantumque extitisse Humani Generis Decus" („Пусть поздравляют себя смертные с тем, что были в состоянии выставить столь великое украшение рода человеческого").

[3]) Иоанн Кеплер (J. Kepler) родился в деревне, в Вюртемберге, в 1571 г., умер в Ратисбоне в 1630 г. Он был сначала помощником, а потом преемником датчанина Тихо-Браге (Tycho Brahe) в должности математика и астронома императорского двора в Праге. Из знаменитых трех его законов первые два были опубликованы в сочинении „Astronomia nova, sive etc." (Heidelbergue 1609), а третий — в сочинении „Harmonices mundi", Libri V (Linz 1619).

В силу второго закона движение каждой планеты является центральным (рубр. 48) и имеет солнце своим центром.

Вычислим значение компоненты a_ρ ускорения по радиусу-вектору.

Поместим полюс в одном из двух фокусов эллипса и направим полярную ось по большой оси в сторону более близкой вершины; обозначим через a большую полуось, через b малую полуось, через e эксцентриситет орбиты, наконец, через p параметр ее. Тогда, как известно из аналитической геометрии:

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}, \quad p=\frac{b^2}{a}, \quad \rho=\frac{p}{1+e\cos\theta}.$$

Отсюда последовательно находим:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos\theta,$$

$$\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}=-\frac{e}{p}\cos\theta, \qquad \frac{1}{\rho}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}=\frac{1}{p}.$$

Соотношение (60) при этих условиях принимает вид:

$$a_\rho=-\frac{c^2}{p}\frac{1}{\rho^2}.$$

Отсюда мы видим, что ускорение всегда направлено к солнцу и изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от него.

Сверх того, из третьего закона Кеплера нетрудно вывести, что коэфициент пропорциональности:

$$\frac{c^2}{p}=\frac{ac^2}{b^2},$$

имеет одно и то же значение для всех планет. В самом деле, если обозначим через T продолжительность полного обращения планет и вспомним, что c есть двойная секториальная скорость движения, то нам станет ясно, что площадь эллиптической орбиты планеты выражается также произведением $\frac{c}{2}T$. Поэтому

$$c=\frac{2\pi ab}{T};$$

возвышая обе части этого равенства в квадрат и деля их на $p=\frac{b^2}{a}$, получим:

$$\frac{c^2}{p}=\frac{4\pi^2 a^3}{T^2};$$

но по третьему закону Кеплера отношение $\frac{a^3}{T^2}$ имеет одно и то же значение для всех планет; то же самое имеет, следовательно, место и для отношения $\frac{c^2}{p}$.

9. Равномерное винтовое движение.

55. В качестве последнего примера рассмотрим движение, составленное (рубр. 5) из равномерного кругового движения на плоскости π и прямолинейного равномерного движения по прямой, перпендикулярной к π. Так как слагающее прямолинейное движение есть движение проекции движущейся точки P на некоторую прямую, то, очевидно, все равно, по какой из параллельных прямых оно происходит. Поэтому без ограничения общности мы можем предположить, что траекторией прямолинейного движения служит перпендикуляр к плоскости π из центра O окружности, по которой происходит круговое движение. Отсчет времени будем производить от момента, в который точка, равномерно двигающаяся по этому перпендикуляру, находится в точке O. Эту точку O мы примем за начало декартовых координат; за ось z примем траекторию слагающего прямолинейного движения, ориентировав эту прямую так, чтобы круговое движение представлялось правосторонним; за положительную ось x примем луч, идущий из центра O к той точке окружности, в которой находится движущаяся по ней точка P_1 в момент $t=0$ (когда точка P_z, двигающаяся по оси z, находится в O). Ориентированная ось y при этих условиях уже однозначно определена установленным соглашением, что триэдр $Oxyz$ должен быть правосторонним. Наконец, через r обозначим радиус круговой траектории точки P_1, через ω — ее угловую скорость (по условию, *постоянную*) и через V — абсолютное значение скорости точки P_z (также *постоянное*).

В момент $t=0$ точка P_1 в силу сделанного нами выбора координат находится в точке, имеющей на плоскости x, y координаты r, 0. Это соответствует тому, что в уравнениях (39) равномерного кругового движения $\theta_0=0$; а потому эти уравнения примут в настоящем случае вид:

$$x=r\cos\omega t,\quad y=r\sin\omega t;$$

уравнение же движения точки P_z по оси z, поскольку она в момент $t=0$ должна находиться в O, будет:

$$z=\pm Vt,$$

причем здесь нужно взять знак $+$ или $-$ в зависимости от того, является ли движение P_z при установленной стороне обращения оси z прогрессивным или регрессивным.