но по третьему закону Кеплера отношение $\frac{a^3}{T^2}$ имеет одно и то же значение для всех планет; то же самое имеет, следовательно, место и для отношения $\frac{c^2}{p}$.

9. Равномерное винтовое движение.

55. В качестве последнего примера рассмотрим движение, составленное (рубр. 5) из равномерного кругового движения на плоскости π и прямолинейного равномерного движения по прямой, перпендикулярной к π. Так как слагающее прямолинейное движение есть движение проекции движущейся точки P на некоторую прямую, то, очевидно, все равно, по какой из параллельных прямых оно происходит. Поэтому без ограничения общности мы можем предположить, что траекторией прямолинейного движения служит перпендикуляр к плоскости π из центра O окружности, по которой происходит круговое движение. Отсчет времени будем производить от момента, в который точка, равномерно двигающаяся по этому перпендикуляру, находится в точке O. Эту точку O мы примем за начало декартовых координат; за ось z примем траекторию слагающего прямолинейного движения, ориентировав эту прямую так, чтобы круговое движение представлялось правосторонним; за положительную ось x примем луч, идущий из центра O к той точке окружности, в которой находится движущаяся по ней точка P_1 в момент $t=0$ (когда точка P_z, двигающаяся по оси z, находится в O). Ориентированная ось y при этих условиях уже однозначно определена установленным соглашением, что триэдр $Oxyz$ должен быть правосторонним. Наконец, через r обозначим радиус круговой траектории точки P_1, через ω — ее угловую скорость (по условию, *постоянную*) и через V — абсолютное значение скорости точки P_z (также *постоянное*).

В момент $t=0$ точка P_1 в силу сделанного нами выбора координат находится в точке, имеющей на плоскости x, y координаты r, 0. Это соответствует тому, что в уравнениях (39) равномерного кругового движения $\theta_0=0$; а потому эти уравнения примут в настоящем случае вид:

$$x=r\cos\omega t,\quad y=r\sin\omega t;$$

уравнение же движения точки P_z по оси z, поскольку она в момент $t=0$ должна находиться в O, будет:

$$z=\pm Vt,$$

причем здесь нужно взять знак $+$ или $-$ в зависимости от того, является ли движение P_z при установленной стороне обращения оси z прогрессивным или регрессивным.

Соединяя теперь движения точек P_1 и P_z в одно движение точки P, мы получим для последнего уравнения:

$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t, \quad z = \pm Vt. \tag{61}$$

Возвышая последние два уравнения в квадрат и складывая их, получим:

$$x^2 + y^2 = r^2; \tag{62}$$

этим подтверждается обстоятельство, и без того ясное, что движение точки P происходит по цилиндрической поверхности вращения, меридианом которой служит окружность радиуса r, а осью — ось z.

Скорость v точки P имеет компоненты:

$$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t, \quad \dot{y} = r\omega\cos\omega t, \quad \dot{z} = \pm V;$$

отсюда напряжение скорости:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + V^2}$$

оказывается *постоянным*, так что результирующее движение является *равномерным*, как и его составляющие.

Сверх того, из трех направляющих косинусов скорости v третий:

$$\frac{\dot{z}}{v} = \pm\frac{V}{\sqrt{r^2\omega^2 + V^2}},$$

имеет постоянное значение; это означает, что скорость, а следовательно, и касательная к траектории, наклонена под постоянным углом к оси z, т. е. составляет постоянный угол с образующими круглого цилиндра, по поверхности которого происходит движение точки P. Мы отсюда заключаем, что траектория точки P представляет собою винтовую линию на круглом цилиндре (62). Вместе с тем, движение (61) характеризуется тем, что это — равномерное винтовое движение; ось z служит осью винта, радиус основания равен r, а угол наклонения к оси есть

$$\arccos\frac{\pm V}{\sqrt{r^2\omega^2 + V^2}}.$$

Ускорение, которое ввиду равномерности движения должно сводиться к своей центробежной слагающей, имеет компоненты:

$$\ddot{x} = -r\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -r\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y, \quad \ddot{z} = 0.$$

Оно имеет постоянное напряжение $\omega^2 r$ и направлено по перпендикуляру из точки P к оси z; оно совпадает, таким образом, с ускорением, которое имела бы точка, совершающая равномерное движение с угловой скоростью ω по окружности ортогонального сечения цилиндра.

Отметим еще, наконец, что за промежуток времени $\frac{2\pi}{\omega}$ (период слагающего кругового движения) точка P_1 обходит всю окружность, а следовательно, точка P описывает целый завиток винта (т. е. дугу винтовой линии, содержащуюся между двумя последовательными ее пересечениями с одной и той же образующей цилиндра); соответственно этому третья координата $z = \pm Vt$ изменяется за тот же промежуток времени на

$$\pm \frac{2V\pi}{\omega};$$

поэтому число $\frac{2V\pi}{\omega}$ называется *ходом винта* (расстояние между двумя последовательными пересечениями винтовой линии с одной и той же образующей). Ход винта зависит только от отношения $\frac{V}{\omega}$ скоростей обеих составляющих движений, — точнее, он прямо пропорционален скорости прямолинейного движения и обратно пропорционален скорости кругового движения.

Равномерное винтовое движение называется *правосторонним* или *левосторонним* в зависимости от того, как будет представляться слагающее круговое движение наблюдателю, *ориентированному в сторону прямолинейного движения*. Так как в уравнениях (61) ось предполагается ориентированной таким образом, что круговое движение является по отношению к ней правосторонним, то *уравнения* (60) *выражают правостороннее или левостороннее винтовое движение в зависимости от того, взята ли третья координата со знаком* $+$ *или* $-$

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Поезд в движении имеет скорость в 72 *км* в час. При помощи тормозов его можно остановить в 20 мин. Допуская, что движение поезда за этот промежуток является равномерно замедленным, вычислить, на каком расстоянии от станции нужно пустить в действие тормоза.

2. Закон, по которому точка движется по траектории, выражается путевым уравнением $s = f(t)$ (§ 4). *Годографом* или *диаграммой* движения называется кривая, выражаемая тем же уравнением, если t принимается за абсциссу, а s за ординату точки. В соответствии с этим:

a) вычертить диаграмму равномерного движения с остановками или без них (приложение к железнодорожным графикам);

b) вычертить диаграмму гармонического движения

3. Точка A движется по прямой равномерно. Определить траекторию (*кривую преследования*) точки P, движущейся таким образом, что ее скорость, сохраняя постоянное напряжение v, всегда направлена к точке A. Вычислить время, необходимое точке P, чтобы настигнуть точку A (в предположении, что v больше скорости u точки A).

4. Принимается, что вода в реке вблизи прямолинейного берега течет со скоростью, пропорциональной расстоянию от берега. Человек, плывущий поперек реки с постоянной скоростью (относительно воды), описывает дугу параболы. Показать, что время, в которое он достигнет берега, не зависит от скорости течения реки (т. е., собственно, от коэфициента пропорциональности между скоростью и расстоянием).