Отметим еще, наконец, что за промежуток времени $\frac{2\pi}{\omega}$ (период слагающего кругового движения) точка P_1 обходит всю окружность, а следовательно, точка P описывает целый завиток винта (т. е. дугу винтовой линии, содержащуюся между двумя последовательными ее пересечениями с одной и той же образующей цилиндра); соответственно этому третья координата $z = \pm Vt$ изменяется за тот же промежуток времени на

$$\pm \frac{2V\pi}{\omega};$$

поэтому число $\frac{2V\pi}{\omega}$ называется *ходом винта* (расстояние между двумя последовательными пересечениями винтовой линии с одной и той же образующей). Ход винта зависит только от отношения $\frac{V}{\omega}$ скоростей обеих составляющих движений, — точнее, он прямо пропорционален скорости прямолинейного движения и обратно пропорционален скорости кругового движения.

Равномерное винтовое движение называется *правосторонним* или *левосторонним* в зависимости от того, как будет представляться слагающее круговое движение наблюдателю, *ориентированному в сторону прямолинейного движения*. Так как в уравнениях (61) ось предполагается ориентированной таким образом, что круговое движение является по отношению к ней правосторонним, то *уравнения* (60) *выражают правостороннее или левостороннее винтовое движение в зависимости от того, взята ли третья координата со знаком* + *или* —

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Поезд в движении имеет скорость в 72 *км* в час. При помощи тормозов его можно остановить в 20 мин. Допуская, что движение поезда за этот промежуток является равномерно замедленным, вычислить, на каком расстоянии от станции нужно пустить в действие тормоза.

2. Закон, по которому точка движется по траектории, выражается путевым уравнением $s = f(t)$ (§ 4). *Годографом* или *диаграммой* движения называется кривая, выражаемая тем же уравнением, если t принимается за абсциссу, а s за ординату точки. В соответствии с этим:

a) вычертить диаграмму равномерного движения с остановками или без них (приложение к железнодорожным графикам);

b) вычертить диаграмму гармонического движения

3. Точка A движется по прямой равномерно. Определить траекторию (*кривую преследования*) точки P, движущейся таким образом, что ее скорость, сохраняя постоянное напряжение v, всегда направлена к точке A. Вычислить время, необходимое точке P, чтобы настигнуть точку A (в предположении, что v больше скорости u точки A).

4. Принимается, что вода в реке вблизи прямолинейного берега течет со скоростью, пропорциональной расстоянию от берега. Человек, плывущий поперек реки с постоянной скоростью (относительно воды), описывает дугу параболы. Показать, что время, в которое он достигнет берега, не зависит от скорости течения реки (т. е., собственно, от коэфициента пропорциональности между скоростью и расстоянием).

5. Лодка отходит от точки A на берегу реки, вода которой течет с постоянной скоростью v, и направляется в каждый момент к противоположной точке B также с постоянной скоростью u (относительно воды) [1]. Ширина реки равна l. Определить траекторию, пройденную лодкой, время, в течение которого она переплыла реку, наибольшее удаление, которое она имела в пути от прямой AB, и ее скорость в момент наибольшего удаления.

6. В любой момент движения точки угол между двумя векторами — скоростью и ускорением — будет острым или тупым, в зависимости от того, является ли движение в этот момент ускоренным или замедленным.

7. Вывести выражения радиальной и трансверсальной скоростей плоского движения, исходя из уравнения движения в форме

$$\overline{OP} = \rho e^{i\theta},$$

где ρ и θ суть две определенные функции от t [2].

Таким же приемом получить компоненты радиального и поворотного ускорений.

8. Показать, что плоское движение точки, в котором как тангенциальная, так и нормальная компоненты ускорения имеют постоянные значения, происходит по логарифмической спирали или по одной из кривых, представляющих ее вырождения

(По условию $\frac{dv}{dt} = a$, $\frac{v^2}{r} = b$, где a и b — постоянные; так как $\frac{dv^2}{ds} = \frac{1}{v}\frac{dv^2}{dt}$, то первое из этих соотношений дает $\frac{dv^2}{ds} = 2a$; диференцируя теперь по s второе соотношение $v^2 = br$, получаем $\frac{dr}{ds} = \frac{2a}{b}$; это именно соотношение и характеризует логарифмические спирали и их вырождения.)

9. Как известно, если дана кривая на плоскости, то подошвенной точкой любой ее точки P относительно полюса O называется основание Q перпендикуляра, опущенного из точки O на касательную к кривой, проведенную в точке P.

Обозначая через ρ и θ — полярные координаты точки P относительно полюса O, через p — длину радиуса-вектора подарной точки Q, соответствующей P, легко доказать следующие два диференциальные соотношения:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{p}{\rho^2}, \quad \frac{dp}{d\rho} = c\rho,$$

где ds и ρ означают элемент длины и кривизну данной кривой в точке P. Если через φ обозначим аномалию касательной (надлежащим образом ориентированной), то аномалия подарной точки Q имеет значение $\varphi + \frac{\pi}{2}$, и первое из вышеприведенных двух соотношений можно написать в виде:

$$\frac{pd\left(\overline{\varphi} + \frac{\pi}{2}\right)}{\rho\, d\theta} = c\rho.$$

Основываясь на этом результате и на втором из двух вышеприведенных соотношений, можно показать [опираясь на соотношение (19) рубр. **19**], что при любом плоском движении напряжение скорости подарной точки равно $\rho c v$, где v — скорость точки P.

---

[1] То-есть лодочник ведет лодку так, что в каждый момент движения ее собственная скорость (по отношению к воде) направлена к точке B и имеет постоянное напряжение u.

[2] Нужно заметить, что здесь идет речь о векторе $\overline{OP}$, а не о его длине OP. (*Ред.*).

10. Вычислить глубину оврага, опуская в него камень и учитывая время, протекшее между моментами, когда камень был опущен и когда был услышан шум от удара камня о дно оврага. Принимается при этом, что звук распространяется со скоростью 340 *м/сек.*

11. Камень брошен вертикально вверх. При подъеме он проходит некоторое расстояние h (по отношению к начальному своему положению) в t_1 секунд и затем, достигнув наибольшей высоты подъема, опускается и возвращается обратно через следующие t_2 секунд. Показать, что $2h = gt_1t_2$ и что начальная скорость камня была равна $\frac{1}{2}g(t_1+t_2)$.

12. Даны две точки A и B; определить, в каком направлении нужно бросить из A тяжелое тело с заданной (по напряжению) скоростью v_0, чтобы оно прошло через точку B.

(Нужно воспользоваться первой формулой рубр. **32**, принимая точку A за начало координат; далее, выразить, что парабола, выходящая из A под неизвестным углом α, пройдет через точку B (x, y). Это приводит к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg}\alpha$. Задача может иметь: два решения, одно или ни одного. Эти три случая характеризуются тем, что *точка B не может быть достигнута, если она лежит вне параболы*

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{v_0^2}{g} + \frac{1}{2}\,g\frac{x^2}{v_0^2},$$

которая поэтому называется *параболой безопасности.*)

13. Несколько тяжелых точек брошены из одной и той же точки O в одной и той же вертикальной плоскости в различных направлениях, но с той же начальной скоростью v_0. Показать, что геометрическое место фокусов траекторий есть окружность $\left(\text{с центром в точке } O \text{ и радиусом } \frac{v_0^2}{2g}\right)$, что геометрическое место вершин этих парабол есть эллипс, что все они огибают параболу безопасности (см. предыдущее упражнение).

14. Несколько тяжелых тел (точек), брошенных в один и тот же момент из одной и той же точки и с одной и той же скоростью (но в различных направлениях), в каждый момент движения находятся на одной сфере (центр и радиус которой меняются от момента к моменту).

15. Два камня брошены с вершины башни с одной и той же скоростью, но в различных направлениях, именно под углами α_1 и α_2 к горизонту. Как оказалось, они упали в одно и то же место. Определить высоту башни.

16. Две тяжелые точки двигаются в одной и той же вертикальной плоскости. Если в какой-либо момент их скорости расположены симметрично относительно какой-либо вертикали, то они останутся симметричными и в любой другой момент движения.

17. Орудие устанавливается перед вертикальной стеной так, чтобы снаряды могли проноситься над стеной; высота стены над дулом пушки равна h, расстояние пушки от стены равно d. Выстрелы производятся в плоскости, перпендикулярной к стене, под различными углами, но с одной и той же начальной скоростью v_0. Какому ограничению должны быть подвергнуты данные задачи для того, чтобы снаряды действительно могли попадать за стену, не проламывая ее. Если это ограничение удовлетворено, то каково расстояние, над которым оружие *командует*, т. е. какова длина отрезка MN, в пределы которого падают снаряды, пролетающие над стеной?

18. Под средним значением функции $f(\lambda)$ в произвольном интервале (λ_1, λ_2) разумеют отношение:

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\,d\lambda.$$

Опираясь на это определение, показать, что при каждом равномерно переменном прямолинейном движении, начинающемся с состояния покоя, имеют место следующие соотношения:

a) Если рассматривать скорость как функцию времени, то среднее ее значение от начального до любого конечного момента равно половине скорости в конечный момент.

b) Если рассматривать скорость как функцию от расстояния точки от начального положения, то ее среднее значение (между начальным и произвольным другим положениями) составляет две трети конечного значения.

19. Показать, что какое угодно число гармонических движений:

$$x = r_i \cos (\omega t + \theta_i) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

происходящих на одной и той же прямой с одним и тем же центром и одним и тем же периодом, соединяются в одно (*результирующее*) гармоническое движение:

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} r \cdot \cos (\omega t + \theta_i),$$

имеющее тот же центр и тот же период.

20. Пусть будет дано произвольное гармоническое движение $x = r \cos (\omega t + \theta)$ На произвольной плоскости (плоскости чертежа) наносим систему полярных координат и радиус-вектор $\overline{OP}$, имеющий длину r и аномалию θ. Такой вектор представляет совместно обе постоянные r и θ (амплитуду и начальную фазу) и потому называется *изображением* рассматриваемого *гармонического движения.*

Показать, что результирующее гармоническое движение, о котором идет речь в упражнении **19**, изображается вектором, представляющим собою сумму тех векторов, которые изображают слагающие гармонические движения.

21. Показать, что движение, слагающееся из двух гармонических движений с общим центром и общим периодом, имеет своей траекторией эллипс (вырождающийся в частных случаях в окружность и в прямую).

22. Если проекции движущейся точки P на три оси координат совершают гармонические колебания, имеющие общий центр в начале координат, то это движение центральное, а траекторией его служит эллипс.

Указать, в каких случаях это движение оказывается круговым или прямолинейным.

23. В электротехнике обыкновенно называют *вращающимся вектором* вектор, выходящий из постоянной точки, имеющий постоянную длину и вращающийся равномерно в плоскости; под *альтернирующим* вектором разумеют проекцию вращающегося вектора на постоянную прямую, проходящую через центр вращения (начало вращающегося вектора), и расположенного в плоскости вращения.

Совершенно ясна тесная зависимость, связывающая вращающийся вектор и соответствующий альтернирующий вектор с равномерным движением точки по окружности и соответствующим гармоническим колебанием. Вспоминая определения рубр. **34**, очевидно, очень легко сообразить, что разумеют под *величиной, стороной вращения, частотой и фазой* вращающегося вектора и *под амплитудой, прямой действия, частотой и фазой* альтернирующего вектора.

Исходя из этих определений, доказать следующие свойства:

a) В плоскости даны два вращающиеся вектора одинаковой частоты. Если оба вектора вращаются в одну и ту же сторону, то их сумма (результирующий вектор) представляет собою также вращающийся вектор. Если же они вращаются в противоположные стороны, то результирующий вектор может быть разложен на альтернирующий и вращающийся векторы (последний обращается в нуль, если вращающиеся компоненты имеют одинаковую длину).

b) Результирующий вектор какого угодно числа альтернирующих векторов, имеющих одинаковую частоту и одну и ту же прямую действия, сам представляет собою альтернирующий вектор (ср. упражнение **19**).

c) Два альтернирующие вектора дают вращающийся результирующий вектор, если они имеют равные амплитуды и частоты и если разность их фаз равна дополнению угла, содержащегося между их направлениями (ср. упражнение **21**, случай окружности; это наблюдение привело к открытию *вращающегося магнитного поля* Галилео Феррариса).

24. В затухающем колебательном движении продолжительность одного простого полуоборота (полупериода $\frac{\pi}{\omega}$ соответствующего гармонического колебания) составляет 1 сек. Было обнаружено, что определенные положения колеблющейся точки в одном таком полуобороте отстояли соответственно на 20 и 19 *см* от центра по одну и другую сторону от него. Через сколько времени (считая от момента, когда движущаяся точка находилась на расстоянии 20 *см* от центра) можно будет считать движение затухшим, если пренебречь полуоборотами, амплитуды которых ниже 1 *мм*.

25. В замедленном спиральном движении, рассмотренном в рубр. **37**, ускорение наклонено к нормали под постоянным углом, тангенс которого равен m.

26. Если точка движется по закону, выражаемому уравнением $P = P(t)$, то соответствующим годографическим движением называется движение точки V, определяемое уравнением:

$$\overline{OV} = \dot{P}(t),$$

где O—произвольная постоянная точка. Определенная таким образом точка V, очевидно, представляет собою конечную точку вектора, представляющего скорость точки P в момент t и приложенного в точке O.

Показать, что для равномерного движения годографическое движение имеет траекторией сферическую кривую; для кеплеровых движений эта кривая представляет собою окружность (центр которой лежит на ординате фокуса).

Наметим ход аналитического доказательства последнего предложения. Относя траекторию к ее осям и вводя эксцентрическую аномалию u, имеем:

$$x = a \cos u, \quad y = b \sin u;$$

отсюда фокальный радиус

$$\rho = a\,(1 - e \cos u),$$

где e — эксцентриситет траектории.

Если параллельным перенесением осей поместим начало координат в фокус (центр движения), то будем иметь:

$$x_1 = x - c, \quad y_1 = y.$$

С другой стороны, принимая во внимание постоянство секториальной скорости (относительно фокуса), найдем:

$$\dot{u} = \frac{n}{1 - e \cos u},$$

где $n = \frac{C}{ab}$, а C означает двойную постоянную площадей.

Теперь обозначим через ξ, η координаты произвольной точки годографа; тогда

$$\xi = \dot{x} = -an \frac{\sin u}{1 - e \cos u}, \quad \eta = \dot{y} = bn \frac{\cos u}{1 - e \cos u},$$

или после простых преобразований:

$$\xi = -\frac{a^2 n}{b} \frac{y_1}{\rho}, \quad \eta - \frac{a^2 ne}{b} = \frac{a^2 n}{b} \frac{x_1}{\rho};$$

отсюда непосредственно вытекает требуемое предложение.

То же предложение можно доказать синтетически, если принять во внимание, что *подарой* (геометрическое место подарных точек) эллипса относительно одного из его фокусов служит окружность и что окружность при инвертировании обратными радиусами-векторами переходит в окружность же. Теперь достаточно применить эти две теоремы к выражению тех кинематических обстоятельств движения, что секториальная скорость имеет постоянное значение и выражается моментом скорости относительно центра; это же последнее свойство выражается равенством:

$$pv = C,$$

где p есть расстояние фокуса от касательной к эллипсу.

27. При каждом центральном движении имеет место соотношение:

$$a_\rho = \frac{C^2 \rho}{r p^3},$$

где C, ρ и p сохраняют те же значения, что и в предыдущей задаче, а r есть радиус кривизны траектории.

28. Если точка движется по эллипсу центральным движением относительно центра эллипса, то ускорение пропорционально радиусу-вектору; если она движется по логарифмической или гиперболической спирали, совершая центральное движение относительно полюса спирали, то ускорение обратно пропорционально кубу радиуса-вектора.

29. В кеплеровом движении слагающие скорости по перпендикуляру к радиусу-вектору и по малой оси траектории имеют каждая постоянное значение (см. указание к упражнению **26**).

30. Точка описывает окружность $x^2 + y^2 = 1$ с ускорением, которое численно все время равно 1; в тот момент, когда движущаяся точка находится на оси абсцисс в точке (1,0), ускорение направлено к центру окружности.

Показать, что при этих условиях движение либо происходит равномерно, либо имеет ускорение, компоненты которого равны:

$$\ddot{x} = -\cos 3\theta, \quad \ddot{y} = -\sin 3\theta,$$

где θ — аномалия движущейся точки.

[В самом деле, из соотношений (58″) рубр. **52** следует, что при заданных условиях $a_\rho = -\dot{\theta}^2$, $a_\theta = \ddot{\theta}$, а потому

$$\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2 \leqslant 1.$$

Мы получаем частное решение этого диференциального уравнения, полагая $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = \pm 1$; ему соответствует равномерное движение по окружности; предполагая $\ddot{\theta} \neq 0$, мы введем вспомогательный угол ψ и заменим квадратное уравнение, связывающее $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$ параметрическими уравнениями:

$$\dot{\theta} = \cos\psi, \quad \ddot{\theta} = \sin\psi.$$

Диференцируя первое уравнение и сопоставляя результат со вторым, получим:

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\ddot{\theta}\dot{\psi}.$$

Исключая случай, когда $\ddot{\theta} = 0$, получим $2\dot{\theta} = -\dot{\psi}$; принимая же во внимание начальное условие, заданное для положения $\theta = 0$, находим $\psi = -2\theta$. Отсюда следует, что

$$a_\rho = -\cos 2\theta, \quad a_\theta = -\sin 2\theta,$$

а так как

$$\ddot{x} = a_\rho \cos\theta - a_\theta \sin\theta, \quad \ddot{y} = a_\rho \sin\theta + a_\theta \cos\theta,$$

то отсюда вытекает непосредственно соотношение, указанное в задании.]

31. Показать (пользуясь нормальной слагающей в равномерном винтовом движении), что радиус кривизны кругового винта имеет постоянное значение $R + \frac{h^2}{R}$, где R — радиус цилиндра, которому винт принадлежит, а h — его ход.

32. На цилиндрической поверхности с каким угодно сечением кривые, пересекающие все образующие под постоянным углом, называются также винтовыми линиями. Из этого определения непосредственно вытекает, что скорость движущейся точки сохраняет постоянное отношение к своей проекции на неподвижную плоскость в том и только в том случае, если траекторией служит винтовая линия.