ГЛАВА III.

Кинематика твердых систем.

1. Общие соображения.

1. Первая постановка — с помощью осей, заложенных в твердой системе. Изучив в предыдущей главе движения одной точки, мы перейдем теперь к кинематике *фигуры*, или системы точек; составляющие систему точки могут при этом входить в ее состав в ограниченном или неограниченном числе; в последнем случае они обыкновенно расположены по линии, поверхности или в сплошных частях пространства.

Прежде всего мы займемся движением *твердой системы*, т. е. фигуры, которая в продолжение движения сохраняет без изменения взаимные расстояния своих точек, попарно взятых. Такими мы представляем себе фигуры в элементарной геометрии, когда мысленно передвигаем их в пространстве с целью установить, налагается ли одна на другую или нет.

И здесь, как и в случае одной точки, мы отнесем движение данной твердой системы S к триэдру декартовых осей $\Omega\xi\eta\zeta$, который для удобства обозначения будем называть *неподвижным триэдром*, отнюдь не теряя при этом, однако, из виду относительного характера понятия о движении.

Чтобы учесть твердость системы S, рассмотрим второй триэдр $Oxyz$, правосторонний, как и $\Omega\xi\eta\zeta$, но неизменно связанный с системой S; этот последний триэдр мы будем называть *подвижным* (поскольку он движется вместе с системой S) или *телесным* как связанный с твердым телом. Из того факта, что триэдр $Oxyz$ образует вместе с S новую твердую систему, следует, что каждая точка P системы S (или даже просто связанная с S твердой связью), двигаясь относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$, сохраняет во все время этого движения неизменные координаты x, y, z относительно подвижной системы.

Вследствие этого движение любой точки P системы S относительно $\Omega\xi\eta\zeta$ будет вполне охарактеризовано, если, с одной стороны, положение точки P в системе S будет определено ее координатами x, y, z относительно осей $Oxyz$, а с другой стороны, для каждого момента будет задано положение подвижного триэдра $Oxyz$ относительно неподвижного $\Omega\xi\eta\zeta$. Для этой же цели будет достаточно выразить в зависимости от времени по-

ложение начала подвижного триэдра O и его основные версоры $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, относя их движение к триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$. В самом деле, движение произвольной точки P системы S может быть выражено при помощи геометрического тождества:

$$\overline{\Omega P} = \overline{\Omega O} + \overline{OP}.$$

Здесь вектор $\overline{\Omega O}$ определяет положение точки O относительно неподвижного триэдра, а вектор $\overline{OP}$ определяет положение точки P. Если оба вектора $\overline{\Omega O}$ и $\overline{OP}$ будут заданы в функции времени, то в каждый момент будет известен и радиус-вектор $\overline{\Omega P}$ точки P, а следовательно, и ее положение относительно неподвижного триэдра. Но, согласно тождеству (14) гл. I:

$$\overline{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

Поэтому

$$\overline{\Omega P} = \overline{\Omega O} + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{1'}$$

Здесь координаты x, y, z сохраняют во все время движения постоянные значения, а векторы $\overline{\Omega O}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ представляют собою функции времени; если эти функции будут заданы, то уравнение (1) выразит (геометрически) движение точки P.

Если введем координаты ξ, η, ζ точки P и α, β, γ точки O, а также компоненты α_h, β_h, γ_h ($h = 1, 2, 3$) версоров $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (совпадающие с их направляющими косинусами), то векторное уравнение (1) проектированием на неподвижные оси заменится тремя скалярными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Это — *общие уравнения движения твердой системы*, так как они непосредственно выражают в функции времени координаты произвольной точки P системы S относительно неподвижного триэдра, коль скоро ее положение в системе S определено координатами x, y, z. В них входят, помимо постоянных координат x, y, z, 12 функций времени, именно α, β, γ, и девять направляющих косинусов α_h, β_h, γ_h ($h = 1, 2, 3$); так как последние отвечают трем попарно ортогональным версорам, то они связаны (I, рубр. **10**) соотношениями:

$$\alpha_h^2 + \beta_h^2 + \gamma_h^2 = 1 \qquad (h = 1, 2, 3);$$

$$\alpha_h \alpha_k + \beta_h \beta_k + \gamma_h \gamma_k = 0 \quad (h \neq k = 1, 2, 3).$$

Как и в случае движения точки (II, рубр. 4), мы примем, что все функции $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ однозначны, конечны и непрерывны, а также, что они имеют производные, по крайней мере, первого и второго порядка во всем промежутке времени, в котором определено движение.

Здесь, наконец, будет еще полезно отметить, что уравнение (1′) и эквивалентные ему уравнения (2) остаются в силе не только по отношению к каждой точке движущейся твердой системы S, но и для любой другой точки, хотя бы и не принадлежащей системе S, но неразрывно (твердой связью) с нею связанной[1]). Таким образом движением системы S фактически определяется движение целого сплошного пространства точек, связанных с S твердой связью. Мы приходим, таким образом, к представлению, что на неподвижное пространство, связанное с триэдром $\Omega\xi\eta\zeta$ (или на неподвижную неизменяемую среду), в каждый момент налагается неизменяемая среда („подвижное пространство"), связанная с системой S и движущаяся вместе с нею относительно среды $\Omega\xi\eta\zeta$. Поэтому часто говорят просто *о твердом движении* в смысле движения целого сплошного пространства (или сплошной неизменяемой среды), не упоминая при этом о той частной системе, которой эта среда, собственно, определяется.

2. Вторая постановка, непосредственно проистекающая из неизменяемости взаимных расстояний. В движущейся твердой системе расстояние между произвольными двумя точками P_1 и P_2 остается постоянным; вследствие этого в продолжение всего движения имеет место тождество:

$$(\overline{P_1P_2})^2 = r^2, \tag{3}$$

где r есть скаляр, не зависящий от времени. Диференцируя это соотношение по времени, получим:

$$\overline{P_1P_2} \cdot \dot{\overline{P_1P_2}} = 0. \tag{4}$$

Если O есть постоянная точка движущейся системы, то (I, рубр. 71):

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1}; \quad \dot{\overline{P_1P_2}} = \dot{\overline{OP_2}} - \dot{\overline{OP_1}} = \frac{dP_2}{dt} - \frac{dP_1}{dt}.$$

Поэтому предыдущее тождество можно написать в таком виде:

$$\overline{P_1P_2}\,\frac{dP_2}{dt} = \overline{P_1P_2}\,\frac{dP_1}{dt}. \tag{5}$$

Если разделим в этом равенстве с обеих сторон вектор $\overline{P_1P_2}$ на r, то оно выразит, что компоненты скоростей $\dot{P}_1$ и $\dot{P}_2$ по прямой P_1P_2 равны между собою.

Но и, обратно, интегрирование приводит от уравнения (4) к соотношению (3) с постоянным значением скаляра r. Отсюда мы заключаем, что *твердые движения системы точек характеризуются тем обстоятельством, что в каждый момент скорости любых двух ее точек имеют одинаковые компоненты по прямой, соединяющей эти точки.*

---

[1]) То-есть сохраняющей постоянные расстояния от всех точек системы S. (*Ред.*)

Другими словами, разность (геометрическая) скоростей двух точек перпендикулярна к прямой, соединяющей эти точки; это и выражают равенством (5), если написать его в виде:

$$\overline{P_1P_2}\left(\frac{dP_2}{dt}-\frac{dP_1}{dt}\right)=0.$$

Поэтому, если, в частности, скорость какой-либо точки в некоторый момент равна нулю, то скорость всякой другой точки P_2 в тот же момент перпендикулярна к прямой P_1P_2 (или также равна нулю).

2. Поступательные движения.

3. Прежде чем обратиться к изучению твердого движения [1]) в наиболее общем его виде, рассмотрим некоторые наиболее простые типы его. В первую очередь, предположим, что некоторое твердое движение происходит таким образом, что каждый вектор $\overline{P_1P_2}$, идущий от одной точки системы к другой, остается постоянным; это значит, он сохраняет не только свою длину, как при всяком твердом движении, но и свое направление и сторону обращения. Такое движение называется поступательным.

Выразив вектор системы $\overline{OP}$ в форме (1), мы видим, что в случае поступательного движения правая сторона равенства должна сохранять постоянное значение (должна представлять постоянный вектор, каковы бы ни были значения координат x, y, z). В частности, должны оставаться постоянными основные версоры $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ подвижных осей. Обратно, если это имеет место, т. е. если основные версоры $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ остаются во все время постоянными, то и всякий вектор системы $\overline{P_1P_2}$ остается постоянным, ибо

$$\overline{P_1P_2}=\overline{OP_2}-\overline{OP_1}=(x_2-x_1)\,\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\,\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\,\boldsymbol{k}.$$

Итак, уравнение (1′) *выражает поступательное движение в том, и только в том, случае, если во все время движения остаются постоянными основные версоры* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Чтобы получить уравнения твердого движения в декартовых координатах, предположим, что в начальный момент оси подвижного триэдра были взяты параллельными неподвижным осям и были обращены каждая соответственно в ту же сторону. Тогда векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, которые в нашем поступательном движении остаются постоянными, будут во все время движения иметь компоненты:

$$1,\ 0,\ 0;\quad 0,\ 1,\ 0;\quad 0,\ 0,\ 1;$$

это значит, в уравнениях (2):

$$\alpha_1=1,\ \beta_1=0,\ \gamma_1=0;\ \alpha_2=0,\ \beta_2=1,\ \gamma_2=0;\ \alpha_3=0,\ \beta_3=0,\ \gamma_3=1;$$

[1]) Под твердым движением здесь и в дальнейшем подразумевается движение твердого тела.