Другими словами, разность (геометрическая) скоростей двух точек перпендикулярна к прямой, соединяющей эти точки; это и выражают равенством (5), если написать его в виде:

$$\overline{P_1P_2}\left(\frac{dP_2}{dt}-\frac{dP_1}{dt}\right)=0.$$

Поэтому, если, в частности, скорость какой-либо точки в некоторый момент равна нулю, то скорость всякой другой точки P_2 в тот же момент перпендикулярна к прямой P_1P_2 (или также равна нулю).

2. Поступательные движения.

3. Прежде чем обратиться к изучению твердого движения[1] в наиболее общем его виде, рассмотрим некоторые наиболее простые типы его. В первую очередь, предположим, что некоторое твердое движение происходит таким образом, что каждый вектор $\overline{P_1P_2}$, идущий от одной точки системы к другой, остается постоянным; это значит, он сохраняет не только свою длину, как при всяком твердом движении, но и свое направление и сторону обращения. Такое движение называется поступательным.

Выразив вектор системы $\overline{OP}$ в форме (1), мы видим, что в случае поступательного движения правая сторона равенства должна сохранять постоянное значение (должна представлять постоянный вектор, каковы бы ни были значения координат x, y, z). В частности, должны оставаться постоянными основные версоры $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ подвижных осей. Обратно, если это имеет место, т. е. если основные версоры $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ остаются во все время постоянными, то и всякий вектор системы $\overline{P_1P_2}$ остается постоянным, ибо

$$\overline{P_1P_2}=\overline{OP_2}-\overline{OP_1}=(x_2-x_1)\,\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\,\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\,\boldsymbol{k}.$$

Итак, уравнение (1′) *выражает поступательное движение в том, и только в том, случае, если во все время движения остаются постоянными основные версоры* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Чтобы получить уравнения твердого движения в декартовых координатах, предположим, что в начальный момент оси подвижного триэдра были взяты параллельными неподвижным осям и были обращены каждая соответственно в ту же сторону. Тогда векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, которые в нашем поступательном движении остаются постоянными, будут во все время движения иметь компоненты:

$$1,\ 0,\ 0;\quad 0,\ 1,\ 0;\quad 0,\ 0,\ 1;$$

это значит, в уравнениях (2):

$$\alpha_1=1,\ \beta_1=0,\ \gamma_1=0;\ \alpha_2=0,\ \beta_2=1,\ \gamma_2=0;\ \alpha_3=0,\ \beta_3=0,\ \gamma_3=1;$$

[1] Под твердым движением здесь и в дальнейшем подразумевается движение твердого тела.

уравнения принимают поэтому вид:

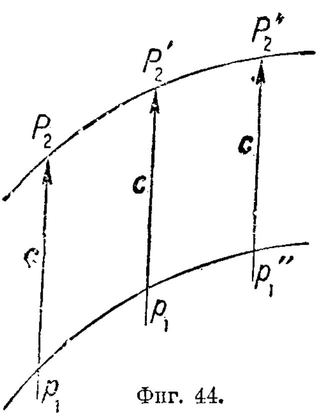
$$\xi = x + \alpha(t), \quad \eta = y + \beta(t), \quad \zeta = z + \gamma(t), \tag{6}$$

где α, β, γ, по существу, суть координаты совершенно произвольной точки движущейся системы (или точки, неизменно с нею связанной). Это значит: *поступательное твердое движение определяется движением одной точки системы.*

4. Тождество

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = c, \tag{7}$$

где c — постоянный вектор, имеет место для любых двух точек P_1, P_2 во все время поступательного движения. Согласно этому, положение точки P_2 в любой момент можно получить, прибавляя постоянный вектор c к вектору $\overline{OP_1}$ (фиг. 44), т. е., если в любой момент перенести начало вектора c в точку, в которой в этот момент находится P_1, то конец его определит положение точки P_2. Из уравнения (7), таким образом, вытекает, что *в поступательном движении траектории отдельных точек одинаковы и одинаково расположены* (т. е. могут быть приведены в совмещение одна с другой параллельным перенесением) и что *точки пробегают эти траектории по одному и тому же закону.*



Фиг. 44.

Это последнее утверждение можно доказать также, диференцируя уравнение (7) по t; мы получим:

$$\frac{d\overline{OP_2}}{dt} = \frac{d\overline{OP_1}}{dt} \text{ или } \dot{P}_2 = \dot{P}_1; \tag{8}$$

все точки системы имеют, таким образом, в любой момент движения, равные скорости.

И, обратно, если в движущейся системе в любой момент движения все точки имеют одну и ту же скорость (конечно, в векторном значении слова), т. е. для любых двух ее точек P_1 и P_2 имеет место соотношение (8), то, интегрируя это уравнение, мы приходим к соотношению (7); движение будет поступательным.

Таким образом всякое поступательное движение характеризуется определенным вектором, представляющим собою функцию только от времени и выражающим в каждый момент общую скорость всех точек системы.

Этот вектор называется *скоростью поступательного движения* и в качестве его представителя можно принять скорость любой точки системы, например, скорость $\dot{O}$ начала координат подвижного триэдра; ее компоненты имеют значения $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$. Аналогично этому, диференцируя уравнение (8) относительно t, мы приходим к заключению, что ускорения всех точек системы в любой момент, в частности, равны ускорению $\ddot{O}$ (с координатами $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$) точки O. Вектор, таким образом определенный (и представляющий собою функцию только времени), называется *ускорением поступательного движения.*

Если скорость поступательного движения остается постоянной и, следовательно, ускорение равно нулю, то все точки системы движутся прямолинейно и равномерно (II, рубр. 16) и притом по параллельным траекториям с одинаковой (скалярной) скоростью; в этом случае движение называется *равномерным поступательным движением.*

3. Вращательные движения.

5. Другим важным типом твердого движения является вращательное движение. *Вращательным* называется такое твердое движение системы, при котором остаются неподвижными точки некоторой прямой, называемой *осью вращения.* Чтобы реализовать такого рода движение, очевидно, достаточно вследствие твердости системы, закрепить две точки оси. Если в подвижной системе S возьмем произвольную точку P вне оси вращения, то перпендикуляр PQ, опущенный из нее на ось, вследствие твердости системы будет во все время вращения сохранять свою длину и будет оставаться перпендикулярным к оси; это значит, всякая точка системы S, лежащая вне оси, будет двигаться в плоскости, перпендикулярной к оси, по окружности, имеющей центр Q на самой оси. Положение системы S, вращающейся вокруг оси z, определяется в каждый момент положением одной ее точки P (на соответствующей круговой траектории) или, что, по существу, то же, положением некоторой полуплоскости p, отходящей от оси и твердо связанной с системой S; положение же этой полуплоскости можно определять, указывая для каждого момента ее аномалию $\theta = \widehat{\pi p}$ относительно определенной полуплоскости π, также отходящей от оси z, но твердо связанной с неподвижным координатным триэдром. Чтобы присвоить этим аномалиям (измеряемым в радианах) знак, мы ориентируем ось вращения в определенную сторону и будем считать углы θ положительными в ту сторону, которая соответствует правостороннему вращению вокруг ориентированной оси.

Во время движения аномалия θ движущейся полуплоскости p представляет собой определенную функцию времени $\theta(t)$; как обыкновенно, мы будем считать эту функцию однозначной, непрерывной и диференцируемой (допускающей, по крайней мере, производные первого и второго порядка). И здесь,—как мы это уже делали в случае плоского движения, выраженного в полярных координатах,—чтобы не допустить привходящей разрывности функции $\theta(t)$, мы примем, что аномалия θ может непрерывно изменяться и за пределы интервала от 0 до 2π (которого, по существу, достаточно для определения всевозможных положений полуплоскости p).

Если в течение некоторого промежутка времени Δt, аномалия θ полуплоскости p изменяется на $\Delta\theta$, то все точки,