(и представляющий собою функцию только времени), называется *ускорением поступательного движения.*

Если скорость поступательного движения остается постоянной и, следовательно, ускорение равно нулю, то все точки системы движутся прямолинейно и равномерно (II, рубр. 16) и притом по параллельным траекториям с одинаковой (скалярной) скоростью; в этом случае движение называется *равномерным поступательным движением.*

3. Вращательные движения.

5. Другим важным типом твердого движения является вращательное движение. *Вращательным* называется такое твердое движение системы, при котором остаются неподвижными точки некоторой прямой, называемой *осью вращения.* Чтобы реализовать такого рода движение, очевидно, достаточно вследствие твердости системы, закрепить две точки оси. Если в подвижной системе S возьмем произвольную точку P вне оси вращения, то перпендикуляр PQ, опущенный из нее на ось, вследствие твердости системы будет во все время вращения сохранять свою длину и будет оставаться перпендикулярным к оси; это значит, всякая точка системы S, лежащая вне оси, будет двигаться в плоскости, перпендикулярной к оси, по окружности, имеющей центр Q на самой оси. Положение системы S, вращающейся вокруг оси z, определяется в каждый момент положением одной ее точки P (на соответствующей круговой траектории) или, что, по существу, то же, положением некоторой полуплоскости p, отходящей от оси и твердо связанной с системой S; положение же этой полуплоскости можно определять, указывая для каждого момента ее аномалию $\theta = \widehat{\pi p}$ относительно определенной полуплоскости π, также отходящей от оси z, но твердо связанной с неподвижным координатным триэдром. Чтобы присвоить этим аномалиям (измеряемым в радианах) знак, мы ориентируем ось вращения в определенную сторону и будем считать углы θ положительными в ту сторону, которая соответствует правостороннему вращению вокруг ориентированной оси.

Во время движения аномалия θ движущейся полуплоскости p представляет собой определенную функцию времени $\theta(t)$; как обыкновенно, мы будем считать эту функцию однозначной, непрерывной и диференцируемой (допускающей, по крайней мере, производные первого и второго порядка). И здесь,—как мы это уже делали в случае плоского движения, выраженного в полярных координатах,—чтобы не допустить привходящей разрывности функции $\theta(t)$, мы примем, что аномалия θ может непрерывно изменяться и за пределы интервала от 0 до 2π (которого, по существу, достаточно для определения всевозможных положений полуплоскости p).

Если в течение некоторого промежутка времени Δt, аномалия θ полуплоскости p изменяется на $\Delta\theta$, то все точки, очевидно, описывают в этот промежуток Δt на соответствующих системе S круговых траекториях дуги, которым соответствует при центре угол $\Delta\theta$; взяв поэтому

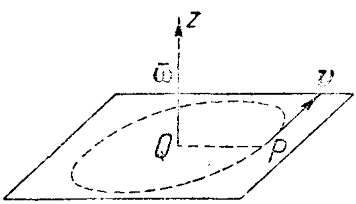
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta},$$

мы заключаем, что *во всякий момент движения все точки вращающейся твердой системы имеют ту же угловую скорость.*

При установленных положениях эта угловая скорость $\dot{\theta}$ (представляющая собой только функцию времени) своим знаком—положительным или отрицательным—определяет в каждый момент, является ли движение правосторонним или левосторонним (конечно, относительно ориентированной оси).

Своей угловой скоростью вращательное движение определяется (по крайней мере, до надлежащих начальных условий), если известна ось вращения. Угловая скорость, о которой здесь идет речь, представляет собою скалярную величину. Но, чтобы ее отобразить совместно с направлением оси, обыкновенно вводят вектор $\bar{\omega}$, имеющий во всякий момент t длину $\dot{\theta}(t)$ и направленный по оси вращения в ту ее сторону, по отношению к которой вращение является правосторонним. Этот вектор $\bar{\omega}$, длина которого обыкновенно меняется (в функции времени), но направление которого остается постоянным, называется *векторной угловой скоростью вращательного движения.* Когда говорят просто об угловой скорости вращательного движения, то имеют в виду именно эту *векторную* скорость. Скалярная же угловая скорость $\dot{\theta}$, очевидно, служит компонентой угловой скорости $\bar{\omega}$, по ориентированной оси вращения z. Если обозначим через $\boldsymbol{k}$ версор этой оси, то

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{k}. \tag{9}$$



Фиг. 45.

6. Вектор $\bar{\omega}$ позволяет просто выразить векторную скорость $\boldsymbol{v}$ любой точки P вращающейся системы (фиг. 45). Так как точка P движется по окружности в плоскости π, перпендикулярной к оси, вокруг точки Q (относительно проекции точки P на ось z) с угловой скоростью $\dot{\theta}$, то напряжение ее скорости равно $\dot{\theta} \cdot QP$ (II, рубр. **33**), она направлена по касательной к окружности, имеющей центром точку Q и радиус QP; эта касательная перпендикулярна как к $\overline{QP}$, так и к вектору $\bar{\omega}$. Сверх того, вектор $\boldsymbol{v}$, как установлено в предыдущей рубрике, имеет относительно $\bar{\omega}$ правостороннее направление; отсюда непосредственно получается для скорости произвольной точки P выражение:

$$\boldsymbol{v} = [\bar{\omega} \cdot \overline{QP}]$$

В этой формуле, кроме точки P, скорость которой мы желаем выразить, фигурирует еще ее проекция Q на ось z, которая, вообще, меняется вместе с P. Но эту точку Q можно элиминировать, вводя вместо нее произвольную *постоянную* точку Ω на оси вращения. Как бы точка Ω ни была выбрана,

$$\overline{QP} = \overline{Q\Omega} + \overline{\Omega P};$$

подставляя это выражение в предыдущую формулу и замечая, что векторное произведение параллельных векторов $\overline{\omega}$ и $\overline{Q\Omega}$ равно нулю, мы приходим к выводу, что скорость любой точки P вращающегося пространства выражается формулой:

$$v(t) = [\overline{\omega}(t)\overline{\Omega P}], \tag{10}$$

где Ω *есть постоянная точка, а* $\overline{\omega}$ *— вектор постоянного направления.*

7. Выражение (10) скорости является характерным для вращательного движения (поскольку выполнены условия, установленные для Ω и $\overline{\omega}$). В самом деле, если система движется таким образом, что скорость каждой точки выражается формулой (10), то для любых двух ее точек P_1 и P_2 будем иметь:

$$v_1 = [\overline{\omega}\ \overline{\Omega P_1}], \quad v_2 = [\overline{\omega}\ \overline{\Omega P_2}];$$

вычитая почленно первое равенство из второго, получим:

$$v_2 - v_1 = [\overline{\omega}\ \overline{P_1 P_2}]. \tag{11}$$

Но вектор $[\overline{\omega}\ \overline{P_1 P_2}]$, по определению, перпендикулярен к P_1P_2; умножая поэтому обе части этого равенства скалярно на $\overline{P_1P_2}$, получим:

$$(v_2 - v_1)\ \overline{P_1 P_2} = 0,$$

т. е.

$$[v_2 \overline{P_1 P_2}] = [v_1 \overline{P_1 P_2}];$$

это же соотношение, имеющее место для любых двух точек системы, как мы видели в рубр. 2, устанавливает, что движение твердое.

Но из соотношения (10) вытекает также, что это движение вращательное; в самом деле, оно обнаруживает, что все точки P, для которых вектор $\overline{\Omega P}$ параллелен постоянному направлению $\overline{\omega}$ (т. е. точки прямой, проходящей через Ω и параллельной вектору $\overline{\omega}$), имеют скорость, равную нулю, т. е. остаются неподвижными.

8. Выражение для ускорения произвольной точки P вращающейся твердой системы можно получить, как мы это и сделаем ниже, путем диференцирования по t характеристического выражения (10) скорости движения; но очень поучительно также получить ускорение, учитывая то обстоятельство, что каждая,

точка системы S совершает плоское круговое движение. Для этого достаточно припомнить (II, рубр. 26) общие выражения $\ddot{s}$ и $\frac{v^2}{r}$ тангенциальной и нормальной слагающих ускорения. Нормальная компонента, очевидно, совпадает с *центростремительным* ускорением — a_ρ. Принимая во внимание, что $\dot{s} = \rho\dot{\theta}$ и что ρ остается постоянным, сохраняя значение радиуса круговой траектории r, мы находим:

$$\ddot{s} = \rho\ddot{\theta}, \qquad a_\rho = -\rho\dot{\theta}^2.$$

Здесь $\ddot{s}$ есть слагающая ускорения $\boldsymbol{a}$ точки P, как обыкновенно, по тангенциальному версору $\boldsymbol{t}$ круговой траектории, ориентированному в сторону возрастающих аномалий. Версор $\boldsymbol{t}$ имеет направление скорости $\boldsymbol{v}$ точки P, но обращен в ту же сторону или в противоположную, смотря по тому, имеет ли $\dot{\theta}$ положительное или отрицательное значение. Скорость же $\boldsymbol{v}$, согласно формулам (9) и (10), мы можем представить в виде:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\theta}\,[\boldsymbol{k}\,\overline{\Omega P}].$$

С другой стороны, так как скалярная скорость точки P имеет значение $\rho\dot{\theta}$, то $\boldsymbol{v} = \rho\dot{\theta}\boldsymbol{t}$, а поэтому

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{\rho}\left[\boldsymbol{k}\,\overline{\Omega P}\right].$$

Умножая обе части этого равенства на $\ddot{s} = \rho\ddot{\theta}$, мы получим для тангенциальной компоненты ускорения $\boldsymbol{a}$ выражение:

$$\ddot{\theta}\,[\boldsymbol{k}\,\overline{\Omega P}],$$

или, принимая вновь во внимание соотношение (9):

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}\,\overline{\Omega P}].$$

Что касается нормальной компоненты, то для ее вычисления нужно, прежде всего, выразить версор ориентированного направления QP; он равен $\frac{\overline{QP}}{\rho}$.

Умножая его на $a_\rho = -\rho\dot{\theta}^2$, получим искомую компоненту в форме:

$$-\dot{\theta}^2\,\overline{QP} = -\omega^2\overline{QP}.$$

Складывая теперь обе слагающие ускорения, мы получим искомое выражение ускорения произвольной точки вращающейся твердой системы:

$$\boldsymbol{a} = [\dot{\boldsymbol{\omega}}\,\overline{QP}] - \omega^2\,\overline{QP}. \tag{12}$$

Эту же формулу, как уже указано выше, можно получить и непосредственно формальным путем, диференцируя формулу (10). В самом деле:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left[\dot{\bar{\omega}}\ \overline{\Omega P}\right] + \left[\bar{\omega}\ \dot{\overline{\Omega P}}\right],$$

а так как $\dot{\overline{\Omega P}} = \boldsymbol{v}$, то

$$\boldsymbol{a} = [\dot{\bar{\omega}}\ \overline{\Omega P}] + [\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}]. \tag{12'}$$

Так как вектор $\boldsymbol{v}$ выражается формулой (10), то здесь достаточно подставить это выражение во второй член формулы (12′) и воспользоваться разложением двойного векторного произведения (26) гл. I, чтобы получить соотношение (12). В самом деле, по формуле разложения:

$$[\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}] = [\bar{\omega}\,[\bar{\omega}\ \overline{\Omega P}]] = \bar{\omega}\,(\bar{\omega}\ \overline{\Omega P}) - \overline{\Omega P}\cdot\omega^2.$$

С другой стороны, согласно формуле (9),

$$\bar{\omega}\,(\bar{\omega}\ \overline{\Omega P}) = \dot{\theta}^2\,\boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{k}\,\overline{\Omega P}).$$

Но, с одной стороны, $\boldsymbol{k}\,\overline{\Omega P}$ есть численное значение проекции вектора $\overline{\Omega P}$ на ось $\boldsymbol{k}$, а $\boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{k}\,\overline{\Omega P})$ есть сама проекция вектора $\overline{\Omega P}$ на ось $\boldsymbol{k}$, т. е. вектор $\overline{\Omega Q}$; с другой стороны, по той же формуле (9), $\dot{\theta}^2 = \omega^2$; а потому

$$[\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}] = \omega^2\ \overline{\Omega Q} - \omega^2\ \overline{\Omega P} = \omega^2\,\overline{PQ} = -\omega^2\,\overline{OP}.$$

Полезно выполнить то же вычисление и иным путем. Векторы $\overline{PQ}\,\bar{\omega}$ и $\boldsymbol{v}$ образуют ортогональный правосторонний триэдр. Поэтому вектор $[\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}]$ имеет направление и сторону обращения вектора $\overline{PQ}$. С другой стороны, длина вектора $\boldsymbol{v}$ равна ωPQ, а потому длина вектора $[\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}]$ равна $\omega^2 PQ$. Поэтому векторы $[\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}]$ и $\omega^2\,\overline{PQ}$ имеют одинаковую длину, одно и то же направление и ту же сторону обращения. Вместе с тем,

$$[\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}] = \omega^2\,\overline{PQ} = -\omega^2\,\overline{QP}.$$

Подставляя это в формулу (12′), получаем для $\boldsymbol{a}$ выражение (12).

Если угловая скорость ω постоянна, т. е. не только сохраняет постоянное направление, но имеет и постоянную длину, то каждая точка P системы совершает равномерное круговое движение (со скоростью v), которая от точки к точке меняется пропорционально расстоянию от оси; твердое движение называется, в этом случае, *равномерным вращением*. Ускорение в этом случае сводится к своей центростремительной слагающей:

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2\,\overline{QP},$$

ибо по формуле (12) в этом случае $\dot{\omega} = 0$.

9. Чтобы из уравнений (2) получить уравнения вращательного движения в возможно более простой форме, целесообразно выбрать оси z и ζ неподвижного и подвижного триэдров так, чтобы обе они совпадали с осью вращения. Совместив, далее, точку Ω с O, выберем полуоси x и ξ так, чтобы они лежали соответственно в полуплоскостях p и π (первая подвижная, вторая неподвижная), которые мы взяли в рубр. 5 для определения соответствующей каждому моменту аномалии $\theta(t)$. Тогда очевидно:

$$\widehat{\xi x} = \theta(t), \quad \widehat{\xi y} = \theta(t) + \frac{\pi}{2}; \tag{13}$$

вместе с тем $\boldsymbol{k}$ есть постоянный вектор с компонентами

$$\alpha_3 = 0, \ \beta_3 = 0, \ \gamma_3 = 1;$$

версоры же $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ вследствие соотношений (13) будут иметь компоненты:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \cos\theta, \quad \beta_1 = -\sin\theta, \quad \gamma_1 = 0; \\ &\alpha_2 = \sin\theta, \quad \beta_2 = \cos\theta, \quad \gamma_2 = 0. \end{aligned}$$

А так как $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то мы получим как частный случай общих уравнений (2) для всякого вращательного движения вокруг оси $\zeta = z$ следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ &\eta = x\sin\theta + y\cos\theta, \\ &\zeta = z, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где, конечно, θ есть определенная функция времени. Диференцируя уравнения (14) дважды по времени, мы получим скалярные формулы, соответствующие соотношениям (10) и (12); точнее, мы получим уравнения, выражающие компоненты обеих частей этих равенств на оси $\Omega\xi\eta\zeta$.

В частности, если вращение происходит равномерно, то $\dot\theta = \pm\omega$, где ω есть постоянная, которую нужно взять со знаком $+$ или $-$, смотря по ориентации оси, т. е. в зависимости от того, является ли движение относительно положительной оси z правосторонним или левосторонним. При этих условиях, диференцируя уравнения (14), мы получим для компонент скорости и ускорения по неподвижным осям выражения:

$$\begin{aligned} &\dot\xi = \mp\omega\eta, \quad \dot\eta = \pm\omega\xi, \quad \dot\zeta = 0, \\ &\ddot\xi = -\omega^2\xi, \quad \ddot\eta = -\omega^2\eta, \quad \ddot\zeta = 0. \end{aligned}$$

Небесполезно отметить, что отсюда, как и непосредственно из формул (10) и (12), получаются для аналогичных компонент скорости и ускорения по подвижным осям выражения:

$$\begin{aligned} &v_x = \mp\omega y, \quad v_y = \pm\omega x, \quad v_z = 0, \\ &a_x = -\omega^2 x, \quad a_y = -\omega^2 y, \quad a_z = 0. \end{aligned}$$