4. Сложение движений.

10. Определение. Приведенный в рубр. 2 критерий дает возможность установить важное свойство твердых движений, к которому мы приходим, распространяя на системы точек понятие о составлении или сложении движений, установленное уже для одной движущейся точки (рубр. 5 предыдущей главы). Положим, что для одной и той же системы S точек установлены как возможные для нее в определенный промежуток времени движения M_1, M_2, $M_3, \dots$ (в конечном числе). Движением, *составленным из этих движений* или *сложенным из них* называется такое движение системы S, при котором каждая точка ее в любой момент t имеет скорость, равную сумме ее скоростей (результирующей скорости), составляющих движения M_1, M_2, $M_3, \dots$

Это определение влечет за собою следующую основную теорему. *Движение, составленное из нескольких твердых движений, также представляет собою твердое движение.* В самом деле, возьмем две произвольные точки системы P' и P'' и обозначим через v_1' и v_1'', v_2' и v_2'', v' и $v_3, \dots$ скорости, которые эти точки должны иметь в произвольный момент t в соответствующих движениях M_1, M_2, $M_3, \dots$; тогда в составленном движении эти точки, по определению, будут иметь скорости:

$$v' = v_1' + v_2' + v_3' + \dots \quad \text{и} \quad v'' = v_1 + v_2'' + v_3'' + \dots.$$

Так как, по твердости составляющих движений, скорости v_1' и v_1'', v_2' и v_2'', v_3' и v_3'' имеют одинаковые компоненты по прямой $P'P''$, то тем свойством будут обладать и скорости v' и v'' результирующего движения; поскольку же это имеет место для любой пары точек системы S и в любой момент движения, мы отсюда заключаем, что составленное движение будет твердым.

11. Сложение поступательных движений. Если несколько поступательных движений M_1, $M_2, \dots$ соединяются в одно движение, как это указано в рубр. 3, то и составленное из них (результирующее) движение будет поступательным; в самом деле, поскольку в каждом из составляющих движений все точки имеют одну и ту же скорость, то и в составленном движении все точки в каждый момент будут иметь одну и ту же скорость, равную сумме скоростей составляющих движений.

И, обратно, каждое поступательное движение данной скорости $v(t)$ можно считать составленным из нескольких поступательных движений, или, как говорят, каждое поступательное движение можно *разложить* на несколько поступательных же движений; для этого достаточно каким угодно способом разложить вектор скорости $v(t)$ на несколько векторов (представляющих собою функции времени) и принять каждый из них за скорость некоторого поступательного движения.

Из этих бесчисленных возможных разложений мы отметим два следующих (аналогичных тем, которые мы рассматривали в II, рубр. 5):

1) разложение на прямолинейное поступательное движение по данному направлению и на плоское поступательное движение, перпендикулярное к этому направлению; это разложение получается путем разложения вектора $\overline{\tau}$ на два вектора по направлению заданной прямой и перпендикулярной к ней плоскости;

2) разложение на три прямолинейных движения (например, по направлениям неподвижных осей координат); за составляющие движения нужно принять те, которые имеют скоростями слагающие вектора $\overline{\tau}$ по этим направлениям.

12. Разложение вращательных движений. Слагая два вращательных движения, мы, по общей теореме рубр. **10**, получим твердое движение. Исследуем здесь тот случай, когда оси двух движений, которые мы желаем сложить, проходят обе через одну и ту же точку Ω, которая вследствие этого остается неподвижной в обоих движениях. Принимая эту точку за исходную, как в формулах (10) и (12), мы будем иметь следующие выражения для скоростей произвольной точки P в слагающих движениях:

$$\boldsymbol{v}_1 = [\overline{\omega}_1 \overline{\Omega P}], \quad \boldsymbol{v}_2 = [\overline{\omega}_2 \overline{\Omega P}],$$

где $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ — угловые скорости заданных вращательных движений; скорость же результирующего движения:

$$\boldsymbol{v} = [(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2)\overline{\Omega P}].$$

Это выражение скорости составленного движения формально аналогично выражению скорости вращательного движения, приведенному в рубр. 6; но оно, вообще, не удовлетворяет двум существенным условиям, указанным в этой рубрике. И в самом деле, хотя Ω и в этом случае представляет собою неподвижную точку, но вектор $\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$, который должен был бы играть здесь роль угловой скорости, вообще не сохраняет постоянного направления в пространстве; это обусловливается тем, что слагающие векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, сохраняя каждый постоянное направление в пространстве, имеют, однако, переменные длины; вследствие этого сумма их сохраняет постоянное направление только в исключительных случаях. Поэтому результирующее движение не будет вращательным за исключением того случая, *когда сумма $\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$ сохранит, как и слагающие векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, постоянное направление.*

Отметим, что последнее обстоятельство имеет место, когда оба вектора $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ остаются постоянными, т. е. когда оба слагающие движения равномерны, а также когда векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ имеют общее направление, т. е. когда оси обоих вращательных движений совпадают. Так как все это можно повторить и в случае, когда слагается несколько вращательных движений, оси которых сходятся в общей неподвижной точке Ω, то мы приходим к следующим заключениям.

Несколько равномерных движений, оси которых сходятся в общей точке Ω, слагаются в одно равномерное движение, ось которого проходит через ту же точку Ω.

Несколько вращательных движений (хотя бы и неравномерных), *происходящих вокруг общей оси, слагаются во вращательное движение вокруг той же оси.*

В обоих случаях угловая скорость результирующего движения представляет собою сумму угловых скоростей (векторных) обоих составляющих движений.

13. Разложение вращательных движений. Обратно, всякое вращательное движение можно бесчисленным множеством способов разложить на несколько вращательных движений. Для этого достаточно разложить вектор $\overline{\omega}$, выражающий угловую скорость данного движения, на несколько слагающих, имеющих каждая постоянное направление; эти слагающие нужно принять за угловые скорости слагающих движений, оси которых проходят через общую точку Ω на оси данного движения. В частности, выбрав точку Ω, можно разложить вектор $\overline{\omega}$ на две слагающие, из которых одна будет лежать на произвольной прямой, проходящей через точку Ω, а другая в плоскости, перпендикулярной этой оси; вращательное движение будет разложено на два составляющих вращательных движения со взаимно перпендикулярными осями. Аналогично вращательное движение можно разложить на три „попарно ортогональных“ вращательных движения, т. е. на три движения, оси которых попарно перпендикулярны друг к другу; для этого достаточно выбрать на оси данного движения точку Ω и разложить угловую скорость $\overline{\omega}$ на три слагающих по трем данным направлениям; если эти слагающие $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ мы примем за угловые скорости вращательных движений вокруг соответствующих осей, то их сумма, составляющая вектор $\overline{\omega}$ постоянного направления, воспроизведет заданное вращательное движение.

5. Движения поступательно-вращательные.

14. *Поступательно-вращательным* называется такое твердое движение, которое составлено из поступательного движения и из вращательного движения вокруг постоянной оси. Если $\overline{\tau}(t)$ есть скорость поступательного движения, $\overline{\omega}(t)$ — угловая скорость вращательного движения и Ω — точка на оси последнего, то скорость произвольной точки P системы в поступательно-вращательном движении выразится через (рубр. 4, 6):

$$v = \overline{\tau} + [\overline{\omega}\,\overline{\Omega P}], \tag{15}$$

где — это важно напомнить — Ω есть неподвижная точка,