в случае, когда слагается несколько вращательных движений, оси которых сходятся в общей неподвижной точке Ω, то мы приходим к следующим заключениям.

Несколько равномерных движений, оси которых сходятся в общей точке Ω, слагаются в одно равномерное движение, ось которого проходит через ту же точку Ω.

Несколько вращательных движений (хотя бы и неравномерных), *происходящих вокруг общей оси, слагаются во вращательное движение вокруг той же оси.*

В обоих случаях угловая скорость результирующего движения представляет собою сумму угловых скоростей (векторных) обоих составляющих движений.

13. Разложение вращательных движений. Обратно, всякое вращательное движение можно бесчисленным множеством способов разложить на несколько вращательных движений. Для этого достаточно разложить вектор $\bar{\omega}$, выражающий угловую скорость данного движения, на несколько слагающих, имеющих каждая постоянное направление; эти слагающие нужно принять за угловые скорости слагающих движений, оси которых проходят через общую точку Ω на оси данного движения. В частности, выбрав точку Ω, можно разложить вектор $\bar{\omega}$ на две слагающие, из которых одна будет лежать на произвольной прямой, проходящей через точку Ω, а другая в плоскости, перпендикулярной этой оси; вращательное движение будет разложено на два составляющих вращательных движения со взаимно перпендикулярными осями. Аналогично вращательное движение можно разложить на три „попарно ортогональных" вращательных движения, т. е. на три движения, оси которых попарно перпендикулярны друг к другу; для этого достаточно выбрать на оси данного движения точку Ω и разложить угловую скорость $\bar{\omega}$ на три слагающих по трем данным направлениям; если эти слагающие $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ мы примем за угловые скорости вращательных движений вокруг соответствующих осей, то их сумма, составляющая вектор $\bar{\omega}$ постоянного направления, воспроизведет заданное вращательное движение.

5. Движения поступательно-вращательные.

14. *Поступательно-вращательным* называется такое твердое движение, которое составлено из поступательного движения и из вращательного движения вокруг постоянной оси. Если $\bar{\tau}(t)$ есть скорость поступательного движения, $\bar{\omega}(t)$ — угловая скорость вращательного движения и Ω — точка на оси последнего, то скорость произвольной точки P системы в поступательно-вращательном движении выразится через (рубр. 4, 6):

$$v = \bar{\tau} + [\bar{\omega}\,\overline{\Omega P}], \tag{15}$$

где — это важно напомнить — Ω есть неподвижная точка, векторы $\bar{\tau}$ и $\bar{\omega}$ зависят только от времени, и при этом $\bar{\omega}$ имеет *постоянное направление.*

Из формулы (15) можно получить другое выражение для скорости произвольной точки P, которое, как мы увидим, чрезвычайно полезно и поучительно в общей теории твердых движений.

Если возьмем произвольную точку O, неизменно связанную с нашей твердой системой, и обозначим ее скорость через $\boldsymbol{v}_0$, то последняя, согласно формуле (15), выразится так:

$$\boldsymbol{v}_0 = \bar{\tau} + [\bar{\omega}\,\overline{\Omega O}]. \tag{16}$$

Исключая $\bar{\tau}$ из соотношений (15) и (16), для чего достаточно почленно вычесть второе равенство из первого, и замечая, что

$$[\bar{\omega}\,\overline{\Omega P}] - [\bar{\omega}\,\overline{\Omega O}] = [\bar{\omega}\,(\overline{\Omega P} - \overline{\Omega O})] = [\bar{\omega}\,\overline{OP}],$$

мы получим:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + [\bar{\omega}\,\overline{OP}]. \tag{17}$$

Это выражение представляет явную аналогию с формулой (15); но оно существенно все же отличается от последней тем, что O не есть неподвижная точка, как Ω во вращательном движении, а произвольно взятая точка твердой системы. Отсюда следует, что разложение данного поступательно-вращательного движения, выражаемое соотношением (17), существенно отличается от того, которое, в соответствии с определением поступательно-вращательного движения, содержится в формуле (15). В самом деле, вектор $\boldsymbol{v}_0$ зависит только от времени, а не от точки P; его можно рассматривать поэтому как скорость некоторого поступательного движения всей твердой системы. Но произведение $[\bar{\omega}\,\overline{OP}]$ не может быть интерпретируемо, как скорость вращательного движения вокруг неподвижной оси, потому что точка O не остается неподвижной, как Ω, а движется, как уже сказано, с нашей твердой системой. Но если мы себе представим триэдр, начало которого всегда совпадает с точкой O, а оси параллельны осям ξ, η, ζ, то такой триэдр, очевидно, совершает относительно неподвижного триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ поступательное движение вместе с точкой O, т. е. со скоростью $\boldsymbol{v}_0$. И вот, относительно этого вспомогательного триэдра и связанной с ним неизменяемой среды данная твердая система, действительно, совершает вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}$, ибо в ней точка O остается неподвижной.

Таким образом равенство (17) выражает разложение данного движения на поступательное со скоростью $\boldsymbol{v}_0$ и вращательное с угловой скоростью $\bar{\omega}$ *относительно оси, которая перемещается вместе с поступательным движением* $\boldsymbol{v}_0$, или иначе относительно неизменяемой среды, которая совершает поступательное движение вместе с точкой O.

Такое разложение поступательно-вращательного движения мы будем называть *несобственным* в отличие от *собственного* разложения, выражаемого соотношением (15). Различие между собственным и несобственным разложением заключается, таким образом, в том, что при собственном разложении оба составляющие движения совершаются относительно неподвижного триэдра или неподвижной среды (пространства) $\Omega\xi\eta\zeta$, а при несобственном разложении переносное движение тоже совершается относительно неподвижной среды $\Omega\xi\eta\zeta$, вращательное же движение происходит относительно вспомогательной воображаемой среды, которая перемещается поступательным движением вместе с точкой O. И так как точку O можно выбирать в системе S совершенно произвольно, то таких несобственных разложений можно произвести бесконечное множество.

15. Обратно, положим, что некоторое движение допускает несобственное поступательно-вращательное движение, выражаемое соотношением (17), где v_0 и $\bar{\omega}$ суть векторы, зависящие только от времени, причем второй из них имеет постоянное направление. Отсюда вытекает, что движение можно рассматривать как поступательно-вращательное в собственном смысле слова, и такое разложение можно произвести бесчисленным множеством способов.

В самом деле, взяв *произвольную* постоянную точку Ω, рассмотрим вектор

$$\bar{\tau} = v_0 + [\bar{\omega}\, \overline{O\Omega}];$$

он будет зависеть только от времени. Если обе части этого равенства вычтем из соответствующих частей равенства (17), то придем к соотношению (15), выражающему собственное разложение нашего движения на поступательное и вращательное.

16. Равномерные или винтовые поступательно-вращательные движения. Между поступательно-вращательными движениями особенное значение имеют те, в которых оба составляющие движения (при собственном разложении) происходят равномерно; такое движение мы будем называть просто *равномерным поступательно-вращательным движением*; это название мы ниже оправдаем.

Эти движения, по определению, характеризуются постоянством двух векторов $\bar{\tau}$ и $\bar{\omega}$ относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$; укажем уже здесь, что в этом случае, как мы убедимся в следующей главе (рубр. 8), во всяком несобственном разложении остаются также постоянными векторы v_0 и $\bar{\omega}$, из которых последний выражает угловую скорость относительно подвижного триэдра $Oxyz$. И, обратно, постоянство векторов v_0 и $\bar{\omega}$ влечет за собою постоянство векторов $\bar{\tau}$ и $\bar{\omega}$ в собственном разложении. Чтобы характеризовать состояние движения, мы докажем следующую основную теорему.

Для всякого равномерного поступательно-вращательного движения существует такое собственное разложение, в котором угловая скорость вращения параллельна скорости поступательного движения.

Мы, естественно, исключим случаи, когда $\bar{\tau}=0$ (вращательное движение) или $\bar{\omega}=0$ (поступательное движение) или, наконец, когда вектор $\bar{\omega}$ параллелен вектору $\bar{\tau}$, так как в этом последнем случае наше утверждение оправдывается само собой. Вектор $\bar{\tau}$ мы разложим на два слагающие вектора: V по постоянному направлению угловой скорости $\bar{\omega}$ и V' — в плоскости, перпендикулярной к этому направлению, так что

$$\bar{\tau}=V+V'; \tag{18}$$

V и V' суть постоянные векторы, как и $\bar{\tau}$, причем последний наверное отличен от нуля.

Прежде всего легко доказать, что вследствие взаимной перпендикулярности векторов V' и $\bar{\omega}$ существует такой постоянный вектор h, перпендикулярный к $\bar{\omega}$, что

$$V'=-[\bar{\omega}h]. \tag{19}$$

В самом деле, рассматривая соотношение (19) как векторное уравнение с неизвестным вектором h, помножим обе его части векторно на $\bar{\omega}$. Получим:

$$[\bar{\omega}V']=-\left[\bar{\omega}[\bar{\omega}h]\right].$$

Разлагая здесь двойное векторное произведение во второй части равенства по формуле (26) гл. I, получим:

$$[\bar{\omega}V]=\omega^2 h-\bar{\omega}(h\bar{\omega}).$$

Но так как вектор h должен быть перпендикулярен к $\bar{\omega}'$, то скалярное произведение hV' равно нулю и потому

$$h=\frac{1}{\omega^2}[\bar{\omega}V']. \tag{19'}$$

Действительно, определенный этим путем вектор h перпендикулярен к $\bar{\omega}$; подставляя же его в уравнение (19), получим (по разложении двойного произведения):

$$V'=-\frac{1}{\omega^2}\left[\bar{\omega}[\bar{\omega}V']\right]=V'-\frac{\bar{\omega}}{\omega^2}(\bar{\omega}V');$$

а так как векторы $\bar{\omega}$ и V' взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение обращается в нуль, и равенство превращается в тождество. Вектор (19′) удовлетворяет требованию.

Установив это, подставим в формулу (15) вместо $\bar{\tau}$ сумму (18), а вместо V' выражение (19); мы получим:

$$v = V + [\bar{\omega}\,\overline{\Omega P}] - (\bar{\omega}\, h].$$

Если вектор h приложен в точке Ω, то конец его определит точку Ω_1, так что $h = \Omega\,\Omega_1$; так как Ω есть неподвижная точка, а h—постоянный вектор, то и Ω_1 есть неподвижная точка. Вместе с тем

$$v = V + [\bar{\omega}\,\overline{\Omega P}] - [\bar{\omega}\,\overline{\Omega\Omega_1}] = V + [\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P}]. \qquad (20)$$

Мы видим, таким образом, что данное поступательно-вращательное движение может быть разложено на равномерное поступательное движение со скоростью $\bar{V}$ и равномерно-вращательное движение с угловой скоростью $\bar{\omega}$, параллельной вектору V; ось вращения имеет, следовательно, общее направление векторов $\bar{\omega}$ и V и проходит через неподвижную точку Ω_1.

Отметим, что угловая скорость $\bar{\omega}$ составляющего вращательного движения остается та же, какая была при первоначальном разложении (15).

Кроме того, если вектор $\bar{\tau}$ перпендикулярен к $\bar{\omega}$, то в разложении (18) и (20) $V = 0$; поэтому: если *равномерное вращательное движение сложить с равномерным поступательным движением, перпендикулярным к оси вращения, то получается равномерное же вращательное движение с тою же угловой скоростью, ось которого параллельна первоначальной.*

17. Разложение (20), которое, как было доказано в предыдущей рубрике, можно выполнить для всякого равномерного поступательно-вращательного движения, дает возможность сейчас же выяснить его ход.

Если исключить случай $V = 0$ (равномерное вращательное движение), то формула (20) выражает скорость v каждой отдельной точки P в виде суммы двух векторов V и $[\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P}]$; первый параллелен оси $\bar{\omega}$, второй перпендикулярен к ней; если поэтому через точку Ω_1 проведем прямую ζ, параллельную $\bar{\omega}$ (т. е. оси слагающего вращательного движения) и плоскость π, к ней перпендикулярную, то эти два вектора V и $[\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P}]$ представляют скорости ортогональных проекций P_ζ и P_1 точки P соответственно на ось ζ и на плоскость π. Так как V есть постоянный вектор, то прямолинейное движение точки P_ζ происходит равномерно. Что касается точки P_1, то ее скорость $[\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P}]$ можно представить в виде $[\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P_1}]$; в самом деле,

$$\overline{\Omega_1 P} = \overline{\Omega_1 P_1} + \overline{P_1 P}, \quad [\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P}] = [\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P_1}] + [\bar{\omega}\,\overline{P_1 P}];$$

но последнее слагаемое равно нулю, так как вектор $\overline{P_1 P}$ параллелен $\bar{\omega}$. Из того же обстоятельства, что скорость точки P_1 выражается произведением $[\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P_1}]$, следует (рубр. 7), что она совершает равномерное вращательное движение вокруг точки Ω_1; а отсюда вытекает, далее, что (II, рубр. 55) каждая точка P системы *совершает равномерное винтовое движение*.

Это винтовое движение будет правосторонним или левосторонним в зависимости от того, обращены ли параллельные векторы V и $\bar{\omega}$ в одну и ту же или в противоположные стороны; ход винтовой траектории, равный $2\pi V/\omega$ (II, рубр. 55), остается постоянным для всех точек твердой системы. Напряжение же скорости

$$\sqrt{V^2+\omega^2(P_\zeta P)^2},$$

оставаясь постоянным для каждой точки системы, меняется все же от точки к точке в зависимости от ее расстояния от оси.

В частности, те точки движущейся системы, которые в какой-либо определенный момент, например $t=0$, расположены на оси ζ, определяют в самой системе прямую, которая скользит по оси ζ с постоянной скоростью, обращенной в сторону вектора V.

18. Чтобы написать скалярные уравнения этого винтового движения, примем за подвижный триэдр $Oxyz$ какой угодно триэдр, связанный с твердой системой, в котором осью Z служит прямая, скользящая по неподвижной оси вращения и обращенная в сторону $\bar{\omega}$. За неподвижный же триэдр $\Omega\xi\eta\zeta$ примем тот, с которым совпадает триэдр $Oxyz$ в момент $t=0$. Тогда компонента вектора $\bar{\omega}$ по оси $\Omega\zeta$ выражается по величине и знаку скаляром ω; компонента же вектора V будет иметь значение $\pm V$ в зависимости от того, обращены ли векторы V и $\bar{\omega}$ в одну и ту же сторону, или в противоположные, т. е. в зависимости от того, идет ли движение по правостороннему или левостороннему винту.

Если снова возьмем проекции произвольной точки P нашей системы P_ζ на ось ζ и P_1 на плоскость $\xi\eta$, то точка P_ζ движется по оси ζ равномерно со скоростью $\pm V$ и так как при $t=0$ имеем $\zeta\equiv z$ (как и $\zeta\equiv x$, $\eta\equiv y$) [1]), то уравнение движения точки P_1 будет:

$$\zeta=\pm Vt+z. \tag{21}$$

Что касается проекции P_1, то она совершает в плоскости $\xi\eta$ равномерное движение по окружности с угловой скоростью $\dot{\theta}=\omega$; поэтому аномалия θ оси Ox относительно $O\xi$, которая должна обращаться в нуль в момент $t=0$, выразится через $\theta=\omega t$. Мы получим, следовательно, уравнения движения точки P_1, полагая в первых двух уравнениях (14) рубр. 9 $\theta=\omega t$. Приобщая эти уравнения к полученному уже уравнению (21),

---

1) Знаком $\equiv$ автор желает отметить, что эти равенства в момент $t=0$ имеют место тождественно для всех точек системы. (*Ред.*)

мы переходим к следующим уравнениям твердого винтового движения:

$$\xi = x\cos\omega t - y\sin\omega t,$$
$$\eta = x\sin\omega t + y\cos\omega t,$$
$$\zeta = \pm Vt + z;$$

при $t = 0$ они естественно сводятся к уравнениям (14), если в последних положить $\theta = \omega t$.

6. Твердое движение общего вида.

19. Формулы Пуассона. Тщательно изучив наиболее замечательные твердые движения, мы возвратимся к общей проблеме, поставленной в § 1. Чтобы определить скорость произвольной точки P твердой системы, достаточно будет возвратиться к общему геометрическому уравнению:

$$\overline{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

и диференцировать его по времени; это приводит нас к производным основных версоров $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ по времени. Эти производные связаны между собою тремя векторными уравнениями, которые мы намерены здесь доказать средствами векторного исчисления; это доказательство, по существу, воспроизводит рассуждения Пуассона[1]), который эти соотношения впервые установил. Два других доказательства мы вкратце укажем в упражнениях.

Для определенности начнем с производной $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}$; так как ее компоненты по подвижным осям могут быть выражены в форме

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{i},\quad \frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{j},\quad \frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{k},$$

то мы можем написать:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{i}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{j}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{k}\right)\boldsymbol{k}. \tag{22}$$

Из шести тождеств, связывающих единичные векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, попарно перпендикулярные между собой (I, рубр. 20):

$$\boldsymbol{ii} = 1,\qquad \boldsymbol{jj} = 1,\qquad \boldsymbol{kk} = 1,$$
$$\boldsymbol{jk} = 0,\qquad \boldsymbol{ki} = 0,\qquad \boldsymbol{ij} = 0,$$

[1]) Ср. *Т. Boggio*, Sulla relazione fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi, Atti del R. Istituto Veneto, T. XIV, 1915, стр. 1795—1799. В этом мемуаре основными версорами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ служат произвольные три некомпланарные вектора, связанные с движущейся системой. Доказательство, приведенное в тексте, принадлежит *Марколонго* (R. Marcolongo), Meccanica razionale, Vol. I, Ed. 3-a, Milano 1922.