мы переходим к следующим уравнениям твердого винтового движения:

$$\xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t,$$
$$\eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t,$$
$$\zeta = \pm Vt + z;$$

при $t = 0$ они естественно сводятся к уравнениям (14), если в последних положить $\theta = \omega t$.

6. Твердое движение общего вида.

19. Формулы Пуассона. Тщательно изучив наиболее замечательные твердые движения, мы возвратимся к общей проблеме, поставленной в § 1. Чтобы определить скорость произвольной точки P твердой системы, достаточно будет возвратиться к общему геометрическому уравнению:

$$\overline{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

и диференцировать его по времени; это приводит нас к производным основных версоров $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ по времени. Эти производные связаны между собою тремя векторными уравнениями, которые мы намерены здесь доказать средствами векторного исчисления; это доказательство, по существу, воспроизводит рассуждения Пуассона[1]), который эти соотношения впервые установил. Два других доказательства мы вкратце укажем в упражнениях.

Для определенности начнем с производной $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}$; так как ее компоненты по подвижным осям могут быть выражены в форме

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{i},\quad \frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{j},\quad \frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{k},$$

то мы можем написать:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{i}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{j}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{k}\right)\boldsymbol{k}. \tag{22}$$

Из шести тождеств, связывающих единичные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, попарно перпендикулярные между собой (I, рубр. 20):

$$\boldsymbol{ii} = 1,\qquad \boldsymbol{jj} = 1,\qquad \boldsymbol{kk} = 1,$$
$$\boldsymbol{jk} = 0,\qquad \boldsymbol{ki} = 0,\qquad \boldsymbol{ij} = 0,$$

[1]) Ср. *Т. Boggio*, Sulla relazione fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi, Atti del R. Istituto Veneto, T. XIV, 1915, стр. 1795—1799. В этом мемуаре основными версорами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ служат произвольные три некомпланарные вектора, связанные с движущейся системой. Доказательство, приведенное в тексте, принадлежит *Марколонго* (R. Marcolongo), Meccanica razionale, Vol. I, Ed. 3-a, Milano 1922.

мы получаем, диференцируя по t, тождества:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{di}{dt}i=0, \quad \frac{dj}{dt}j=0, \quad \frac{dk}{dt}k=0, \\ \frac{dj}{dt}k+\frac{dk}{dt}j=0, \quad \frac{dk}{dt}i+\frac{di}{dt}k=0, \quad \frac{di}{dt}j+\frac{dj}{dt}i=0.\end{array}\right\} \qquad (22')$$

Принимая во внимание первое и пятое из них, мы отсюда получим:

$$\frac{di}{dt}=\left(\frac{di}{dt}j\right)j-\left(\frac{dk}{dt}i\right)k.$$

Так как, с другой стороны, версоры i, j, k попарно взаимно перпендикулярны, то имеют еще место равенства:

$$j=[k\,i], \quad k=[i\,j]=-[j\,i].$$

Предыдущему уравнению можно поэтому придать вид:

$$\frac{di}{dt}=\left[\left\{\left(\frac{dk}{dt}i\right)j+\left(\frac{di}{dt}j\right)k\right\}i\right].$$

Если ко второй части прибавить член $\left[\left\{\left(\frac{dj}{dt}k\right)i\,i\right\}\right]$, равный нулю, так как он выражает векторное произведение двух векторов, параллельных i, то мы придадим предыдущему соотношению более симметричную форму:

$$\frac{di}{dt}=\left[\left\{\left(\frac{dj}{dt}k\right)i+\left(\frac{dk}{dt}i\right)j+\left(\frac{di}{dt}j\right)k\right\}i\right].$$

Это и есть первое из трех соотношений между производными основных версоров, которые мы имеем в виду вывести; если положим:

$$\overline{\omega}=\left(\frac{dj}{dt}k\right)i+\left(\frac{dk}{dt}i\right)j+\left(\frac{di}{dt}j\right)k, \qquad (23)$$

то его можно будет написать в виде:

$$\frac{di}{dt}=[\overline{\omega}i].$$

Для производных $\frac{dj}{dt}$ и $\frac{dk}{dt}$ имеют место аналогичные выражения, которые получаются круговым перемещением векторов i, j, k; так как, однако, выражение (23) вектора $\overline{\omega}$ при таком круговом перемещении версоров не изменяется вовсе, то все три соотношения совместно могут быть представлены в простой форме:

$$\frac{di}{dt}=[\overline{\omega}i], \quad \frac{dj}{dt}=[\overline{\omega}j], \quad \frac{dk}{dt}=[\overline{\omega}k]. \qquad (24)$$

В этом виде они известны под названием *формул Пуассона* [1]), так как ему мы обязаны скалярными формулами, которые получаем, проектируя их почленно на оси координат.

Компоненты по подвижным осям вектора $\bar{\omega}$, важное кинематическое значение которого мы скоро увидим, обыкновенно обозначают через p, q, r; из формул (22′) и (23) находим:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\boldsymbol{k} = -\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\boldsymbol{j},\\ q &= \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\boldsymbol{i} = -\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{k},\\ r &= \frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{j} = -\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\boldsymbol{i}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

В заключение обратим внимание еще на следующее обстоятельство. Под параметром t, от которого зависят версоры $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, мы разумели время, но в предыдущем выводе формул (23) и (24) мы этой интерпретацией параметра не пользовались. Поэтому соотношения (23) и (24) остаются в силе для любого ортогонального триэдра, *зависящего от произвольного параметра*.

20. Скорость любого твердого движения. Если уравнение (1), как мы это уже делали, напишем в виде

$$\overline{OP} = \overline{\Omega P} - \overline{\Omega O} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

продиференцируем его и воспользуемся формулой Пуассона, то получим:

$$\dot{\overline{\Omega P}} = \dot{\overline{\Omega O}} + [\bar{\omega}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})];$$

если поэтому примем во внимание, что производные

$$\dot{\overline{\Omega P}} = \frac{d\Omega P}{dt} \quad \text{и} \quad \dot{\overline{\Omega O}} = \frac{d\Omega O}{dt}$$

выражают скорости $\boldsymbol{v}(t)$ и $\boldsymbol{v}_0(t)$ точек P и O, то предыдущее выражение примет вид:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + [\bar{\omega}\,\overline{OP}]. \tag{26}$$

Мы получили, таким образом, выражение скорости любой точки движущейся твердой системы; нужно принять во внимание, что точка O также может быть выбрана в движущейся системе совершенно произвольно; что касается векторов $\boldsymbol{v}_0$ и $\bar{\omega}$, то первый из них представляет скорость точки O, второй же определяется равенством (24); таким образом, оба эти вектора представляют собою функции только от времени, которые в частных случаях могут оказаться постоянными.

[1]) С. Д. Пуассон (Siméon Denis Poisson) родился в Питивиере (Pithiviers, Loiret) в 1781 г., умер в Париже в 1840 г., преподавал аналитическую механику в Сорбонне и сам очень активно способствовал развитию этой дисциплины. Упоминаемые в тексте формулы находятся в его классическом труде „Traité de mécanique", Paris 1831.

Рассуждение, совершенно аналогичное тому, которое приведено в рубр. 7, устанавливает и обратное предложение: если система точек движется таким образом, что скорость каждой из них выражается формулой (26), где векторы v_0 и $\overline{\omega}$ суть функции одного только времени, то взаимные расстояния точек остаются во время движения неизменными; мы имеем, следовательно, дело с твердым движением. Выражение (26) является, таким образом, характеристичным для твердого движения. Таким образом, по отношению к обычному неподвижному триэдру твердое движение определено (по крайней мере, до надлежащих начальных условий), если в движущейся системе совершенно произвольно выбрана принадлежащая ей точка O и установлено два зависящих только от времени вектора v_0 и $\overline{\omega}$. Эти два вектора называются *характеристическими векторами* твердого движения по отношению к *полюсу* или *центру приведения*; вместе с тем *характеристичными* для движения (иногда и просто *характеристиками* твердого движения) называют компоненты этих двух векторов по подвижным осям координат.

В предыдущей рубрике мы ввели уже обозначения p, q, r для компонент (по подвижным осям) вектора $\overline{\omega}$; теперь обозначим компоненты вектора v_0 через u, v, w; проектируя уравнение (25) почленно на подвижные оси, мы получим так называемые *эйлеровы уравнения*:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= u + qz - ry, \\ v_y &= v + rx - pz, \\ v_z &= w + py - qx. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Компоненты u, v, w вектора v_0, имеющего по неподвижным осям компоненты $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, могут быть выражены формулами:

$$\left.\begin{aligned} u &= v_0 i = \dot{\alpha}\alpha_1 + \dot{\beta}\beta_1 + \dot{\gamma}\gamma_1, \\ v &= v_0 j = \dot{\alpha}\alpha_2 + \dot{\beta}\beta_2 + \dot{\gamma}\gamma_2, \\ w &= v_0 k = \dot{\alpha}\alpha_3 + \dot{\beta}\beta_3 + \dot{\gamma}\gamma_3. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

21. Мгновенное распределение скоростей и тангенциальное винтовое движение. Из двух характеристических векторов v_0 и $\overline{\omega}$, твердого движения по отношению к данному полюсу (связанному с системой) первый, по самому своему определению, уже имеет точно установленное кинематическое значение; это скорость точки O. Кинематическая интерпретация второго вектора вытекает из следующих соображений. Если обозначим через v_0^* и $\overline{\omega}^*$ значения, которые принимают векторы v_0 и $\overline{\omega}$ в определенный момент t^*, то соотношение (26) дает для скорости произвольной точки P в этот момент выражение:

$$v = v_0^* + [\overline{\omega}^* \, \overline{OP}].$$

Сопоставляя это с формулой (17) рубр. **14**, мы заключаем, что распределение скоростей различных точек системы S в момент $\bar{t}^*$ такое же, какое имело бы место, если бы тело совершало равномерное переносно-вращательное движение, т. е. винтовое движение; последняя формула выражала бы при этом разложение движения в несобственном значении слова на переносное со скоростью v_0^* и вращательное с угловой скоростью $\bar{\omega}^*$ вокруг оси, проходящей через точку O параллельно вектору $\bar{\omega}^*$ и переносящейся параллельно себе самой со скоростью $\bar{v}_0^*$.

Как векторы v и $\bar{\omega}$ вообще меняются с течением времени, так изменяется и это винтовое движение; в каждый момент оно дает место такому же распределению скоростей твердого движения. Поэтому его называют *тангенциальным винтовым движением* твердого движения в рассматриваемый момент. Называя вместе с Маджи[1]) мгновенное распределение скоростей *состоянием движения* (*atto di moto*), мы можем на основании предыдущих соображений сказать, что *всякое состояние твердого движения является винтовым*.

Из изложенного следует, что вектор $\bar{\omega}$ можно в каждый момент рассматривать, как угловую скорость соответствующего тангенциального движения; поэтому вектор $\bar{\omega}$ просто называют *угловой скоростью* твердого движения в данный момент. Прямая, проходящая через точку O параллельно вектору ω (т. е. ось слагающего вращения при несобственном разложении тангенциального винтового движения, отнесенного к точке O), называется *мгновенною осью вращения* относительно полюса O. Ось тангенциального винтового движения, которая в каждый момент параллельна вектору $\bar{\omega}$, называется просто *осью* или *центральной осью движения* в рассматриваемый момент[2]). Центральная ось движения, естественно, вообще меняет свое положение с течением времени как по отношению к подвижным, так и по отношению к неподвижным осям координат. По самому своему определению, она в каждый момент представляет геометрическое место точек, в которых скорость в этот момент параллельна мгновенной угловой скорости; поэтому на основе соотношений (27) ее уравнения по отношению к подвижным осям суть:

$$\frac{u+qz-ry}{p}=\frac{v+rx-pz}{q}=\frac{w+py-qx}{r}.$$

Центральная ось движения остается неопределенной только в те моменты, в которые состояние движения становится чисто переносным.

22. Мгновенное движение системы S, т. е. совокупность элементарных смещений $dP = v\,dt$, которые отдельные ее точки

1) *Maggi*, Geometria del movimento, Bologna 1927, гл. III.

2) Существование осей движения было в первый раз указано Юлием Моцци (Giulio Mozzi) в 1766 г.

совершают в интервале от t до $t+dt$, выражается на основе соотношения (26), если примем во внимание, что $v_0 dt = d\overline{\Omega O}$ и через $\bar{\psi}$ обозначим бесконечно малый вектор $\bar{\omega}\, dt$, векторным уравнением

$$dP = d\overline{\Omega O} + [\bar{\psi}\, \overline{OP}];$$

оно показывает, как это смещение получается через сложение смещений $d\Omega O$ (очевидно, переносного, одинакового для всех точек системы) и $[\bar{\psi}\, \overline{OP}]$ (очевидно, вращательного, ибо оно равно нулю для всех точек прямой, проходящих через точку O параллельно направлению $\bar{\psi} = \bar{\omega}\, dt$, т. е. мгновенной оси вращения относительно точки O).

Скаляр $\psi = \omega\, dt$ дает в каждый момент величину слагающего элементарного вращения.

23. Изменение характеристических векторов при изменении полюса. Характеристические векторы движения v_0 и $\bar{\omega}$ определены в каждый момент по отношению к данному полюсу или центру приведения O; таким образом, для одного и того же твердого движения, соответственно ∞^3 возможным положением полюса, существует такое же многообразие в определении характеристических векторов. Их кинематическое значение дает возможность непосредственно показать, как изменяются эти векторы с изменением положения полюса. Вектор $\bar{\omega}$, определяющий в каждый момент угловую скорость соответствующего вращательного движения, носит внутренний характер по отношению к заданному движению; если, поэтому, обозначим через v_0' и $\bar{\omega}'$ характеристические векторы движения, отнесенные к полюсу O', отличному от O, но, конечно, также неразрывно связанному с твердой системой S, то, прежде всего, ясно, что

$$\bar{\omega}' = \bar{\omega}.$$

Эта независимость характеристического вектора $\bar{\omega}$ от выбора полюса может быть установлена и непосредственно. С этой целью покажем прежде всего, что угловая скорость $\bar{\omega}$ не изменяется, когда мы изменяем направление подвижных осей при том же полюсе O. В самом деле, обозначим через $\bar{\omega}^*$ угловую скорость, вычисленную по отношению к новому координатному триэдру (с тем же началом O). Скорость произвольной точки P движущейся системы выразится в зависимости от того, отнесена ли система к одному или к другому триэдру формулами:

$$v_0 + [\bar{\omega}\, \overline{OP}] \quad \text{или} \quad v_0 + [\bar{\omega}^*\, \overline{OP}].$$

Приравнивая эти два выражения одного и того же вектора, получим тождество:

$$[\bar{\omega}\, \overline{OP}] = [\bar{\omega}^*\, \overline{OP}] \quad \text{или} \quad [(\bar{\omega} - \bar{\omega}^*)\, \overline{OP}] = 0.$$

А так как оно должно оставаться в силе для любого вектора $\overline{OP}$, то отсюда непосредственно вытекает (I, рубр. 23):

$$\overline{\omega}^* = \overline{\omega}.$$

Теперь перенесем полюс из точки O в O'. Чтобы показать, что и в этом случае вектор $\overline{\omega}$, выражаемый формулой (24), не изменится, возьмем сначала оси, параллельные осям прежнего триэдра; так как при этом не изменятся основные версоры, то не изменится и определяемый ими по формуле (23) вектор $\overline{\omega}$.

Иначе обстоит дело при сравнении первых характеристических векторов v_0 и v_0'; если вектор v_0' отнесен к точке O', т. е. выражает скорость точки O', то в силу соотношения (26):

$$v_0' = v_0 + [\overline{\omega}\,\overline{OO'}] = v_0 + [\overline{O'O}\,\overline{\omega}].$$

Припоминая выводы рубр. 39, гл. I, мы придем к заключению, что *при изменении полюса характеристические векторы $\overline{\omega}$ и v_0 твердого движения меняются совершенно так же, как меняются главный вектор и главный момент системы приложенных векторов при изменении центра приведения.*

Таким образом результаты, полученные в гл. I относительно приведения систем приложенных векторов, непосредственно дают соответствующие предложения относительно состояния движения твердых систем. Центральная ось системы векторов, как геометрическое место точек, в которых главный момент системы параллелен главному вектору, дает в этом случае ось тангенциального винтового движения, т. е. *ось твердого движения*, к которой мы, таким образом, пришли новым путем.

Поступательная скорость вдоль оси движения выражается в этом случае наименьшим моментом системы приложенных векторов (I, рубр. 43):

$$\frac{v_0\,\overline{\omega}}{\omega} = \frac{up + vq + wr}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Наконец, исчезновение в определенный момент инвариантного трехчлена:

$$v_0\overline{\omega} = up + vq + wr = 0$$

выражает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы обращалась в нуль либо угловая скорость, либо поступательная скорость по оси движения; иначе говоря, это условие определяет моменты, в которые движение становится либо чисто переносным, либо чисто вращательным.

24. Твердые движения с неподвижной точкой или параллельные неподвижной плоскости. Легко показать, что для того и другого типа движений инвариантный трехчлен $v_0\overline{\omega}$ обращается тождественно в нуль.

В самом деле, если при твердом движении системы остается неподвижной некоторая ее точка, то мы можем принять эту точку O за центр приведения; тогда $v_0=0$ и вместе с тем $\overline{v}_0\overline{\omega}=0$. Угловую скорость $\overline{\omega}$ мы при этом, конечно, можем считать отличной от нуля, ибо в противном случае при $v_0=0$ мы имели бы состояние покоя; поэтому, в силу заключительного замечания предыдущей рубрики, мы можем сказать, что во все время движения оно является *чисто вращательным вокруг оси, проходящей через точку O* и меняющей свое положение от момента к моменту.

Во вторую очередь рассмотрим движение, параллельное некоторой неподвижной плоскости. Мы можем себе представить осуществление этого рода движения так, что некоторая плоскость p, неразрывно связанная с системой S, остается в неподвижной плоскости π. Если мы примем p и π за плоскости координат xy и $\xi\eta$, то версор $\boldsymbol{k}$ будет постоянным, так как он все время будет оставаться перпендикулярным к постоянной плоскости. Следовательно, в силу соотношений (25) рубр. **19**:

$$p=q=0;$$

т. е. угловая скорость $\overline{\omega}$ также постоянно перпендикулярна к плоскости $\xi\eta$. Так как, с другой стороны, скорость полюса v_0, как и скорость любой другой точки движущейся системы, остается параллельной той же плоскости $\xi\eta$, то мы отсюда заключаем, что инвариантный трехчлен $\overline{v}_0\overline{\omega}$ равен нулю; а это означает, что состояние нашего движения в каждый момент является либо *чисто поступательным* (параллельным плоскости $\xi\eta$), либо чисто вращательным (вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости).

На этом последнем типе движений мы остановимся подробно позже, в гл. V.

25. Состояние движения, составленного из нескольких движений. В случае движения, составленного из нескольких движений, состояние движения определяется тем, что его скорость представляет собой сумму скоростей составляющих движений. При непосредственном изучении состояния движения, составленного из нескольких движений, важно, прежде всего, уяснить себе следующее очевидное положение. Если v_0' и $\overline{\omega}'$, v_0'' и $\overline{\omega}''$ суть характеристические векторы слагающих движений относительно одного и того же полюса O, так что скорости произвольной точки P выражаются формулами

$$v_0'+[\overline{\omega}'\,\overline{OP}] \quad \text{и} \quad v_0''+[\overline{\omega}''\,\overline{OP}],$$

то скорость той же точки в сложном движении выражается формулой:

$$v_0'+v_0''+[(\overline{\omega}'+\overline{\omega}'')\,\overline{OP}],$$

т. е. *характеристические векторы движения, составленного из нескольких движений, равны каждый сумме соответствующих векторов составляющих движений*, предполагая, конечно, что все движения отнесены к одному и тому же полюсу.

26. Чтобы дать интересный пример сложения движений, рассмотрим два вида твердых движений с общей неподвижной точкой O; оба движения, таким образом, представляют собою вращения вокруг осей, проходящих через общую точку O. В обоих составляющих движениях первый характеристический вектор равен нулю; если поэтому обозначим через $\overline{\omega}'$ и $\overline{\omega}''$ соответствующие угловые скорости, то состояние составленного движения будет иметь относительно полюса O характеристические векторы $v_0 = 0$ и $\overline{\omega} = \overline{\omega}' + \overline{\omega}''$; иными словами, движение, *составленное из двух вращений вокруг осей, проходящих через общую точку, представляет собою вращение вокруг оси, проходящей через ту же точку; оно имеет угловую скорость, равную сумме угловых скоростей составляющих движений.*

Этот результат сопоставим с выводами рубр. 12 о сложении конечных вращений вокруг пересекающихся осей. В то время как там составленное движение оказывалось вращательным только в специальном случае вращений вокруг постоянных осей, мы здесь пришли к выводу, что в бесконечно малые промежутки времени движение, составленное из двух вращений (бесконечно малых) вокруг сходящихся осей, всегда представляет собою вращение вокруг оси, проходящей через ту же точку.

27. Аналогичный результат имеет место при сложении вращений вокруг параллельных осей.

Пусть $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ будут угловые скорости двух таких вращений, O_1 и O_2 — две точки на соответствующих осях r_1 и r_2. Предположим сначала, что векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ не равно-противоположны (т. е. не обращены в противоположные стороны, имея общую длину); за полюс характеристических векторов обоих этих движений примем центр O двух параллельных векторов $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, приложенных соответственно в точках O_1 и O_2. В этой точке O характеристические векторы слагающих движений будут (рубр. 23):

$$[\overline{OO_1}\overline{\omega}_1],\ \overline{\omega}_1 \text{ и } [\overline{OO_2}\overline{\omega}_2], \overline{\omega}_2;$$

таким образом, слагая эти движения, мы придем к новому движению, состояние которого определяется характеристическими векторами

$$[\overline{OO_1}\overline{\omega}_1] + [\overline{OO_2}\overline{\omega}_2] \text{ и } \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2.$$

Но так как O есть центр векторов $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, приложенных в точках O_1 и O_2, то первый из характеристических векторов составленного движения равен нулю (I, рубр. 52, 53). Таким образом, *складывая два движения, носящие в определенный момент характер вращений вокруг параллельных осей r_1 и r_2, со скоростями $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, не равно-противоположными, мы получим вращательное движение со скоростью $\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$, ось которого параллельна осям r_1 и r_2; по свойству центра двух параллельных приложенных векторов эта ось лежит в плоскости прямых r_1 и r_2 и делит* *расстояние между ними в отношении ω_1 и ω_2, притом внутреннее или внешнее в зависимости от того, обращены ли векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ в одну и ту же сторону или в противоположные стороны.*

Обратимся теперь к тому случаю, когда векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ равно-противоположны, т. е. $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = 0$; приложенные в точках O_1 и O_2, они образуют, таким образом, пару. В этом случае примем за центр приведения одну из точек O_1 или O_2, — скажем, для определенности, O_1. Для выражения состояния каждого движения получим в этом случае характеристические векторы:

$$0\bar{\omega}_1 \text{ и } [\overline{O_1O_2}\bar{\omega}_2],\ \bar{\omega}_2;$$

характеристические векторы сложного движения будут:

$$[\overline{O_1O_2}\bar{\omega}_2],\quad \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2;$$

так как, однако, $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = 0$, то мы заключаем, что *составленное движение в этом случае будет чисто поступательным; оно направлено перпендикулярно к плоскости осей r_1 и r_2 слагающих движений, скорость же его равна моменту пары угловых скоростей $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$, помещенных каждая на соответствующей оси.*

28. Распределение ускорений движущейся твердой системы. Векторное выражение этого распределения мы получим, диференцируя по t уравнение (26) рубр. 20, отнесенное к неподвижным осям. Мы придем тогда к формуле:

$$a = \dot{v}_0 + [\dot{\omega}\overline{OP}] + [\bar{\omega}\ (v - v_0)]. \tag{29}$$

Здесь $\dot{v}_0$ есть ускорение точки O; мы его обозначим поэтому через a_0. Разность $v - v_0$ по той же формуле (26) равна $[\bar{\omega}\overline{OP}]$. В рубр. 8 мы уже рассматривали это двойное векторное произведение и пришли к заключению, что оно равно $-\omega^2\overline{QP}$, где Q есть проекция точки P на ось вращения. Это выражение нужно подставить вместо него и в формулу (29); нужно только иметь в виду, что под осью вращения здесь следует разуметь прямую, параллельную вектору $\bar{\omega}$, проходящую через точку O, т. е. мгновенную ось, соответствующую рассматриваемому моменту t.

Выполняя подстановку, получим:

$$a = a_0 + [\dot{\omega}\overline{OP}] - \omega^2\overline{QP}. \tag{30}$$

Эта формула содержит выражение (12) рубр. 8 как частный случай. Первые два слагаемые правой части обусловливаются переменным характером характеристических векторов; третье же слагаемое зависит в каждый момент исключительно от тангенциального винтового движения; оно совпадает с ускорением, которое имело бы место в случае равномерного вращения вокруг мгновенной оси действительного вращения с угловой скоростью, которую действительно движение имеет в этот момент.