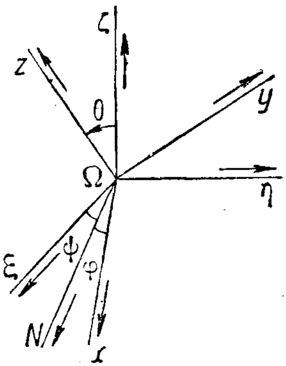
7. Эйлеровы углы.

29. Возвратимся к определению положения твердой системы S относительно установленного неподвижного триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$. Мы уже широко пользовались тем очевидным соображением, что для этого достаточно определить положение относительно $\Omega\xi\eta\zeta$ триэдра $Oxyz$, неразрывно связанного с системой S; и мы знаем, что положение триэдра $Oxyz$, действительно, определено, если установлены относительно $\Omega\xi\eta\zeta$ координаты начала O и три основные единичные вектора $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ или, что то же, соответствующие девять направляющих косинусов α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$; эти последние не независимы, а связаны известными шестью соотношениями (71), приведенными в рубр. **10** гл. I. Таким образом, в качестве независимых параметров нужно было бы принять, кроме координат α, β, γ, еще три из девяти косинусов α_i, β_i, γ_i, выбранные таким образом, чтобы остальные в силу упомянутых соотношений в них непосредственно выражались. Но отчасти из соображений геометрической наглядности фигуры, отчасти для удобства аналитических выводов оказывается более целесообразным пользоваться другими элементами.



Фиг. 46.

Поскольку начало подвижного триэдра $Oxyz$ мы сумеем выбрать, считаясь с тем, чтобы координаты α, β, γ точки O получили наиболее простое выражение, речь будет итти, собственно, о том, чтобы найти способ для удобного определения подвижных осей относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$, т. е. положения относительно него другого триэдра Ωxyz, оси которого выходят из точки Ω, но параллельны подвижным осям xyz (фиг. 46).

Мы исключим сначала случай, когда плоскости xy и $\xi\eta$ совпадают, т. е. когда обе оси ζ и z принадлежат одной и той же прямой. При этом условии рассмотрим пересечение этих плоскостей xy и $\xi\eta$; прямая, по которой эти плоскости пересекаются, перпендикулярна к осям ζ и z, а поэтому перпендикулярна также и к плоскости $\Omega\zeta z$. Эта прямая, ориентированная таким образом, чтобы угол $\widehat{\zeta z}$ $(< \pi)$ ориентированных осей ζ и z представлялся по отношению к ней правосторонним (т. е. чтобы правосторонним было вращение, приводящее ось ζ в совмещение с z), называется *линией узлов* и обозначается через N. Угол $\widehat{\zeta z}$, который заключается, как уже было сказано, между O и π (а в рассматриваемых условиях отличен также от предельных значений O и π), называется *углом нутации* или просто *нутацией*; он обыкновенно обозначается через θ.

Под *углом прецессии* ψ разумеют аномалию $\widehat{\xi N}$ двух ориентированных прямых ξ и N (измеряемую в правую сторону по отношению к оси ζ); наконец, под *углом поворота* φ разумеют аномалию $\widehat{Nx}$ оси x относительно линии узлов (измеряемую, как обычно, справа налево относительно оси z). Два угла φ и ψ, которые оба имеют характер аномалии, измеряются каждый в пределах от 0 до 2π (с исключением верхнего предела).

Определенные таким образом три угла θ, φ и ψ называются эйлеровыми углами триэдра Ωxyz (или любого триэдра, ему параллельного и одинаково с ним ориентированного) относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$. Легко убедиться, что и, обратно, если даны произвольно взятые значения углов θ, φ и ψ, но подчиненные условиям

$$\left.\begin{aligned} 0 < \theta < \pi, \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ 0 \leqslant \psi < 2\pi, \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

то этим определяется положение триэдра Ωxyz относительно $\Omega\xi\eta\zeta$.

В самом деле, угол прецессии ψ определяет на плоскости $\xi\eta$ положение ориентированной линии узлов N; вслед за этим в плоскости, перпендикулярной к N в точке Ω, определяется положение оси z, которая образует с осью ζ угол нутации θ (отсчитываемый в сторону правостороннего вращения). Наконец, в плоскости, проходящей через точку Ω перпендикулярно к оси z (а поэтому содержащей прямую ΩN), ориентированная ось x однозначно определена своей аномалией φ относительно N. Ось y после этого определяется тем, что она должна образовать с осями x и z ортогональный правосторонний триэдр Ωxyz.

Итак, эйлеровы углы, взятые в соответствующих интервалах (31), представляют собою три, по существу своему, независимых параметра, пригодные для определения положения относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ другого триэдра Ωxyz с тем же началом; благодаря этому, эйлеровыми углами определяется положение любой твердой системы.

В случае, который мы исключили, плоскости $\xi\eta$ и xy совпадают; угол нутации θ равен 0 или 2π; но линия узлов остается неопределенной, вследствие чего неопределенными остаются и углы φ и ψ. Но сумма этих углов (в рассматриваемом случае компланарных) сохраняет определенное значение, ибо $\psi = \widehat{\xi N}$, $\varphi = \widehat{Nx}$, а поэтому $\varphi + \psi = \widehat{\xi x}$; этой аномалией плоскости ζx относительно плоскости $\zeta\xi$ определяется положение триэдра Ωxyz относительно $\Omega\xi\eta\zeta$. Неопределенность углов φ и ψ может быть сопоставлена с неопределенностью аномалии, которая имеет место в плоскости при полярных координатах, когда $\rho = 0$.

Если оставим в стороне эти исключительные случаи, то эйлеровы углы твердой системы, движущейся относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$, представляют собою, как и координаты α, β, γ начала подвижного триэдра $Oxyz$, определенные функции времени; так как движение происходит непрерывно, то и они не могут иметь никаких разрывов. Может только случиться, если твердо придерживаться пределов (31), что некоторые из эйлеровых углов в те или иные моменты внезапно должны будут сделать скачок от одного из крайних своих значений к другому, хотя это и не будет связано ни с каким разрывом в самом ходе движения. Но и здесь, как и в аналогичном случае плоских углов в полярных координатах (II, рубр. 14), эти искусственные разрывы устраняются путем отказа от тех или иных из ограничений (31); соответственные эйлеровы углы тогда изменяются непрерывно, хотя и за пределами узких основных интервалов; этим путем, однако (как мы это уже наблюдали относительно аномалии в плоскости), непрерывность восстанавливается ценою утраты однозначности соответствия между положением тела и эйлеровыми углами.

30. Чтобы пользоваться эйлеровыми углами в наших исследованиях, необходимо выразить в них девять косинусов α_i, β_i, γ_i. С этой целью отметим, что к триэдру Ωxyz, к которому относятся эйлеровы углы θ, φ, ψ, можно притти, выполняя над триэдром $\Omega\xi\eta\zeta$ следующие три вращения: 1) поворот на угол ψ вокруг оси ζ; это приведет к триэдру $\Omega\xi_1\eta_1\zeta$, в котором ось ξ_1 совпадет с линией узлов N; 2) поворот на угол θ вокруг оси $\xi_1 \equiv N$; это приведет к триэдру $\Omega\xi_1\eta_1 z$, в котором ось y_1 будет лежать в плоскости ζz так, что угол $\widehat{y_1 z}$ будет прямым, а потому угол $\widehat{\eta_1 y_1}$ будет равен θ; 3) поворот на угол φ вокруг оси z, который приведет ось $\xi_1 \equiv N$ к совпадению с осью x, а потому ось y_1 к совпадению с осью y. Эти три поворота выразятся (рубр. 9) соответственно следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \xi_1 \cos\psi - \eta_1 \sin\psi, \\
\eta &= \xi_1 \sin\psi + \eta_1 \cos\psi, \\
\zeta &= \zeta; \\
\xi_1 &= \xi_1, \\
\eta_1 &= y_1 \cos\theta - z \sin\theta, \\
\zeta_1 &= y_1 \sin\theta + z \cos\theta; \\
\xi_1 &= x \cos\varphi - y \sin\varphi, \\
y_1 &= x \sin\varphi + y \cos\varphi, \\
z &= z.
\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Теперь достаточно исключить ξ_1, η_1, ζ_1 из этих уравнений, чтобы получить значения девяти косинусов α_i, β_i, γ_i. Для этого достаточно подставить во вторые части первой группы уравнений значения η_1 и ζ из второй группы, а потом — вместо ξ_1 и y_1

их значения, содержащиеся в третьей группе. В результате получим следующие выражения косинусов α_i, β_i, γ_i через θ, φ, ψ:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
\alpha_2 &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
\alpha_3 &= \sin\psi\sin\theta,\\
\beta_1 &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
\beta_2 &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
\beta_3 &= -\cos\psi\sin\theta,\\
\gamma_1 &= \sin\varphi\sin\theta,\\
\gamma_2 &= \cos\varphi\sin\theta,\\
\gamma_3 &= \cos\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

31. Из вышеприведенных формул непосредственно получаются выражения в эйлеровых углах θ, φ, ψ компонент единичных векторов $\boldsymbol{k}$, $\overline{\varkappa}$ и $\boldsymbol{N}$ осей z, ζ и линии узлов по подвижным и неподвижным осям. — Так, для вектора $\boldsymbol{k}$ эти компоненты по осям триэдров $\Omega\xi\eta\zeta$ и Ωxyz будут:

$$\alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3 \ \text{ и } \ 0,\ 0,\ 1, \tag{34}$$

а вектора $\overline{\varkappa}$:

$$0,\ 0,\ 1 \ \text{ и } \ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3. \tag{35}$$

Что касается вектора N, то мы будем представлять себе его приложенным в точке Ω; тогда его свободный конец будет иметь относительно триэдра $\Omega\xi_1\eta_1\zeta$, к которому отнесена первая группа уравнений (32), координаты $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = \zeta = 0$; поэтому его компоненты относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ имеют значения:

$$\cos\psi,\ \sin\psi,\ 0. \tag{36}$$

Аналогично этому, относительно триэдра $\Omega\xi_1, y_1, z$, к которому отнесена третья группа уравнений (32), свободный конец вектора N имеет координаты $\xi_1 = 1$, $y_1 = z = 0$; поэтому достаточно подставить эти значения в третью группу уравнений, чтобы получить следующие значения компонент вектора относительно триэдра Ωxyz:

$$\cos\varphi,\ -\sin\varphi,\ 0. \tag{37}$$

32. Теперь уже нетрудно найти выражение мгновенной угловой скорости, которая соответствует переходу твердого тела от положения, определяемого эйлеровыми углами θ, φ, ψ, к положению, определяемому углами $\theta + d\theta$, $\varphi + d\varphi$, $\psi + d\psi$. Из самого определения эйлеровых углов вытекает, что наращение $d\theta$ нутации соответствует элементарному повороту (справа налево) на угол $d\theta$ вокруг линии узлов; таким же образом наращения $d\varphi$ и $d\psi$ углов φ и ψ представляют собою элементарные повороты соответственно вокруг осей z и ζ. Так как речь идет о мгновенных движениях, то угловую скорость $\overline{\omega}$ получим, складывая скорости вышеуказанных трех вращений; таким образом

$$\overline{\omega} = \dot\theta N + \dot\varphi k + \dot\psi\overline{\varkappa}.$$

Отсюда, пользуясь выражениями (34)—(37), а также (33), мы получим компоненты p, q, r и π, χ, ρ угловой скорости $\overline{\omega}$ относительно триэдров Ωxyz и $\Omega\xi\eta\zeta$, именно:

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\gamma_1, \\ q &= -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\gamma_2, \\ r &= \dot\psi\gamma_3 + \dot\varphi; \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned} \pi &= \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\alpha_3, \\ \chi &= \dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\beta_3, \\ \rho &= \dot\varphi\gamma_3 + \dot\psi. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Если в движущемся твердом теле некоторая прямая в какой-либо из своих точек перпендикулярна к траектории этой точки, то она и во всякой другой своей точке направлена по нормали к траектории последней (следствие рубр. 2).

2. Сложение нескольких равномерных вращений вокруг параллельных осей. Угловые скорости $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_n$ этих вращений следует представить векторами, приложенными каждый в произвольной точке соответствующей оси вращения.

Тогда скорость $\boldsymbol{v}$ произвольной точки P тела в составленном движении представляет собою не что иное, как главный момент относительно точки P этой системы векторов. Показать, что составленное движение, если сумма угловых скоростей $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_n$ отлична от нуля, представляет собою также вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}$ (ср. рубр. **27**, в которой рассмотрен случай двух составляющих вращений).

3. Если из точек движущейся твердой прямой провести векторы соответствующих скоростей, то концы этих векторов также будут лежать на прямой и составлять на ней ряд точек, подобный ряду исходных точек.

4. Чтобы доказать формулы Пуассона, проф. Бискончини [1]) замечает, что так как производные $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{j}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}$ обращаются в нуль или соответственно перпендикулярны к версорам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, можно положить:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = [\overline{\omega}_1\boldsymbol{j}], \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = [\overline{\omega}_2\boldsymbol{j}], \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = [\overline{\omega}_3\boldsymbol{k}],$$

причем векторы $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ этим однозначно определяются при добавочном условии, что каждый из них должен быть перпендикулярен к соответствующему версору $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Но эти равенства останутся в силе, если вместо $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ поставим векторы $\overline{\omega}_1 + \sigma_1\boldsymbol{i}$, $\overline{\omega}_2 + \sigma_2\boldsymbol{j}$, $\overline{\omega}_3 + \sigma_3\boldsymbol{k}$, каковы бы ни были скаляры σ_1, σ_2, σ_3. Основываясь на том, что версоры $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ перпендикулярны между собой и каждый из них перпендикулярен к своей производной, можно показать, что три скаляра σ_1, σ_2, σ_3 могут быть выбраны таким образом, что

$$\overline{\omega}_1 + \sigma_1\boldsymbol{i} = \overline{\omega}_2 + \sigma_2\boldsymbol{j} = \overline{\omega}_3 + \sigma_3\boldsymbol{k}.$$

Общее значение этих трех векторов представляет собою угловую скорость $\overline{\omega}$.

---

[1]) *Bisconcini*, Bol. dell'Unione Mat. Italiana, Anno IV, 1925, pp. 5—7.