Отсюда, пользуясь выражениями (34)—(37), а также (33), мы получим компоненты p, q, r и π, χ, ρ угловой скорости $\overline{\omega}$ относительно триэдров Ωxyz и $\Omega\xi\eta\zeta$, именно:

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\gamma_1, \\ q &= -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\gamma_2, \\ r &= \dot\psi\gamma_3 + \dot\varphi; \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned} \pi &= \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\alpha_3, \\ \chi &= \dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\beta_3, \\ \rho &= \dot\varphi\gamma_3 + \dot\psi. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Если в движущемся твердом теле некоторая прямая в какой-либо из своих точек перпендикулярна к траектории этой точки, то она и во всякой другой своей точке направлена по нормали к траектории последней (следствие рубр. 2).

2. Сложение нескольких равномерных вращений вокруг параллельных осей. Угловые скорости $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_n$ этих вращений следует представить векторами, приложенными каждый в произвольной точке соответствующей оси вращения.

Тогда скорость $\boldsymbol{v}$ произвольной точки P тела в составленном движении представляет собою не что иное, как главный момент относительно точки P этой системы векторов. Показать, что составленное движение, если сумма угловых скоростей $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_n$ отлична от нуля, представляет собою также вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}$ (ср. рубр. 27, в которой рассмотрен случай двух составляющих вращений).

3. Если из точек движущейся твердой прямой провести векторы соответствующих скоростей, то концы этих векторов также будут лежать на прямой и составлять на ней ряд точек, подобный ряду исходных точек.

4. Чтобы доказать формулы Пуассона, проф. Бискончини [1]) замечает, что так как производные $\frac{di}{dt}$, $\frac{dj}{dt}$, $\frac{dk}{dt}$ обращаются в нуль или соответственно перпендикулярны к версорам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, можно положить:

$$\frac{di}{dt} = [\overline{\omega}_1 \boldsymbol{j}], \quad \frac{dj}{dt} = [\overline{\omega}_2 \boldsymbol{j}], \quad \frac{dk}{dt} = [\overline{\omega}_3 \boldsymbol{k}],$$

причем векторы $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ этим однозначно определяются при добавочном условии, что каждый из них должен быть перпендикулярен к соответствующему версору $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Но эти равенства останутся в силе, если вместо $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ поставим векторы $\overline{\omega}_1 + \sigma_1 \boldsymbol{i}$, $\overline{\omega}_2 + \sigma_2 \boldsymbol{j}$, $\overline{\omega}_3 + \sigma_3 \boldsymbol{k}$, каковы бы ни были скаляры σ_1, σ_2, σ_3. Основываясь на том, что версоры $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ перпендикулярны между собой и каждый из них перпендикулярен к своей производной, можно показать, что три скаляра σ_1, σ_2, σ_3 могут быть выбраны таким образом, что

$$\overline{\omega}_1 + \sigma_1 \boldsymbol{i} = \overline{\omega}_2 + \sigma_2 \boldsymbol{j} = \overline{\omega}_3 + \sigma_3 \boldsymbol{k}.$$

Общее значение этих трех векторов представляет собою угловую скорость $\overline{\omega}$.

---

[1]) *Bisconcini*, Bol. dell'Unione Mat. Italiana, Anno IV, 1925, pp. 5—7.

5. Производные трех основных версоров $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ не могут быть параллельны между собой, если они не обращаются все три в нуль. В самом деле, если бы такой параллелизм имел место, т. е. если бы существовали такие три скаляра σ_1, σ_2, σ_3 и версор $\boldsymbol{u}$, что

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \sigma_1 \boldsymbol{u}, \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \sigma_2 \boldsymbol{u}, \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \sigma_3 \boldsymbol{u},$$

то производная всякого другого вектора, неразрывно связанного с твердой системой, также выражалась бы через $\sigma \boldsymbol{u}$. И это осталось бы в силе, если бы вместо $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ мы взяли какой угодно другой триэдр, конечно, также связанный с твердым телом. Но в таком случае мы могли бы этот вектор $\boldsymbol{u}$ принять за версор $\boldsymbol{k}$. Учитывая выражения производных $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{j}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}$, которые мы таким образом получим, мы найдем, диференцируя соотношения:

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{i} = 0, \quad \boldsymbol{k}\boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{k}^2 = 1,$$

что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, и придем, таким образом, к переносному движению.

Если исключим этот случай, то мы будем в праве принять, что из производных основных версоров по крайней мере два, скажем, $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}$ и $\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}$, непараллельны и не равны нулю. Вместе с тем и вектор

$$\boldsymbol{p} = \left[\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} \frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\right]$$

отличен от нуля. Но в таком случае нетрудно показать, что

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = m\,[\boldsymbol{p}\boldsymbol{i}], \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = m'\,[\boldsymbol{p}\boldsymbol{j}],$$

где m и m' — два надлежащих скаляра. Тождество

$$\boldsymbol{i}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + \boldsymbol{j}\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = 0$$

приводит к тому, что $m' = m$. Если теперь положим

$$\overline{\omega} = m\boldsymbol{p},$$

то окажется, что и производная $\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}$ может быть представлена в виде $[\overline{\omega}\boldsymbol{k}]$.

Весь этот результат, естественно, останется в силе и для поступательного движения, если положить для этого случая $\overline{\omega} = 0$[1]).

6. Показать, что в движущемся твердом теле геометрическое место точек, скорости которых в определенный момент имеют одно и то же напряжение, представляет собою круглый цилиндр, осью которого служит ось движения (ср. упражнение 8 гл. I).

Аналогично этому показать, что геометрическое место точек, скорости которых направлены в одну и ту же точку, представляет собою пространственную кривую третьего порядка. Направления этих скоростей образуют конус второго порядка с вершиной в точке P.

7. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы в течение некоторого промежутка времени оставалось неизменным направление мгновенной оси вращения (рубр. 21), заключается в том, чтобы в этот промежуток времени обращалось в нуль векторное произведение $\left[\overline{\omega}\,\frac{d\overline{\omega}}{dt}\right]$.

---

[1]) Ср. *A. Signorini*, Esercizi di meccanica razionale (литографированное издание), Palermo, Capozzi, pp. 80—81, а также *C. Poli*, Salla dimostrazione del teorema di Mozzi, Rend. Ist. Lombardo, Vol. LXI, 1928, pp. 389—390.

8. Наиболее общее состояние движения твердого тела в определенный момент всегда может быть рассматриваемо, как составленное из двух вращений, из которых одно происходит вокруг произвольно выбранной в этом теле оси, только не параллельной мгновенной оси и не перпендикулярной к скорости какой-либо лежащей на ней точки (ср. рубр. **25** и упражнение 13 гл. I).

9. Пусть $\Omega\xi\eta\zeta$ будет триэдр неподвижных осей, а C — траектория точки O, движение которой по этой кривой определяется уравнением $s=t$ (s—длина дуги кривой, отсчитываемая от определенной ее точки). Рассмотрим трижды ортогональный правосторонний триэдр $Oxyz$, в котором осью Ox служит касательная, обращенная в сторону движения, а осью Oy — главная нормаль, обращенная к центру кривизны кривой, соответствующему точке O. Если через c и τ обозначим первую и вторую кривизны кривой C в точке O, то всегда имеют место соотношения:

$$p=-\tau, \qquad q=0, \qquad r=c$$

[нужно воспользоваться соотношением (23) и формулами Френе].

10. В движущейся твердой системе во всякий момент существует точка (называемая центром ускорений), в которой ускорение равно нулю. Предполагается, однако, что в этот момент векторное произведение $\left[\overline{\omega}\,\frac{d\overline{\omega}}{dt}\right]$ не обращается в нуль.