Так, например, если как относительное (твердое) движение, так и переносное параллельны неподвижной плоскости, т. е. если соответствующие угловые скорости $\bar{\omega}_r$ и $\bar{\omega}_\tau$ параллельны и сохраняют постоянное направление, то мы можем заключить, путем сложения этих движений, что и абсолютное движение параллельно той же неподвижной плоскости. Его угловая скорость выражается суммой $\bar{\omega}_r + \bar{\omega}_\tau$; если исключим возможный случай поступательного движения, то ось абсолютного движения в каждый момент лежит в плоскости двух осей — относительного и переносного движения — и делит расстояние между ними в обратном отношении численных значений ω_r и ω_τ, притом внутренне или внешне в зависимости от того, обращены ли угловые скорости в одну и ту же сторону или в противоположные стороны.

5. Приложения.

7. Результаты, к которым мы пришли в предыдущих параграфах, находят широкие и изящные приложения в исследовании проблем кинематики, так как весьма многие из них могут быть приведены к проблемам относительного движения в том смысле, как этот термин установлен в настоящей главе. В этом параграфе и двух следующих мы дадим примеры такого рода соображений.

8. **Взаимные движения.** Если даны две твердые системы Σ и S, находящиеся в движении одна относительно другой, то мы будем отличать движение M системы S относительно Σ и *взаимное с ним* движение M^* системы Σ относительно S; вместе с тем мы будем обозначать через v и v^* скорости, которые одна и та же точка P будет иметь в один и тот же (произвольный) момент соответственно в движениях M и M^*; иначе говоря, под v мы будем разуметь скорость точки P, которую мы себе будем представлять неразрывно связанной с системой S, в ее движении M относительно Σ; под v^* мы будем разуметь скорость точки, совпадающей в этот же момент с P в системе Σ в ее движении M^* относительно S.

Чтобы установить соотношение, связывающее скорости v и v^*, будем рассматривать движение M системы S относительно Σ как переносное, а взаимное с ним движение системы Σ относительно S как относительное. Совершенно ясно, что абсолютное движение системы Σ относительно себя самой, которое таким образом устанавливается, будет состоянием покоя; принимая поэтому во внимание, что абсолютная скорость v_a при этих условиях равна нулю в любой момент и в любой точке, мы получим из уравнения (5):

$$v^* = -v \tag{11}$$

9. Отсюда непосредственно вытекает, что *для двух взаимных движений при общем полюсе соответственные характеристические векторы в один и тот же момент взаимно противоположны.*

В самом деле, если через v_0, $\overline{\omega}$ и v_0^*, $\overline{\omega}^*$ обозначим эти характеристические векторы, отнесенные к полюсу O (т. е. скорости точки O и выходящие из O угловые скорости двух движений), то соотношение (11) дает непосредственно:

$$v_0^* = -v_0, \tag{12}$$

так как v_0 и v_0^* представляют собой скорости той же точки O в этих взаимных движениях. Что касается угловых скоростей, то нужно припомнить, что по основной формуле (10) рубр. 9 предыдущей главы скорости v и v^* произвольно взятой общей точки выражаются так:

$$v = v_0 + [\overline{\omega}\overline{OP}], \quad v^* = v_0^* + [\overline{\omega}^*\overline{OP}].$$

Подставляя эти выражения в формулу (11), получим:

$$v_0 + v_0^* + [(\overline{\omega} + \overline{\omega}^*)\ \overline{OP}] = 0.$$

Учитывая же равенство (12), придем к тождеству:

$$[(\overline{\omega} + \overline{\omega}^*)\ \overline{OP}] = 0;$$

а так как тождество это должно иметь место для любой точки, то мы получаем непосредственно:

$$\overline{\omega}^* = -\overline{\omega}.$$

10. Диференцирование векторов, отнесенных к подвижным осям. Если вектор $v(t)$, представляющий собой функцию времени (или какого-либо другого параметра), отнесен к определенному триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$, то его производная определяется, как вектор, компонентами которого служат производные компонент v_ξ, v_η, v_ζ вектора v; мы знаем, что эта производная не меняется, если мы заменяем триэдр $\Omega\xi\eta\zeta$ другим неподвижным относительно него триэдром $Oxyz$. Эта производная, однако, вообще изменяется, если мы отнесем вектор $v(t)$ к другому триэдру, движущемуся относительно первого. Мы постараемся здесь установить, в какой зависимости находится эта производная от характера движения этих средин друг относительно друга [1]).

---

[1]) Содержание задачи можно наглядно себе уяснить из следующих соображений. Представим себе наблюдателя, пребывающего в среде $Oxyz$ и наблюдающего в ней в каждый момент определенный вектор $v(t)$; это может быть, например, скорость некоторой точки P, движущейся относительно среды $Oxyz$. Наблюдатель в моменты t и $t + \Delta t$ составляет векторы:

$$v(t + \Delta t) - v(t) \qquad \text{и} \qquad \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

и предельным переходом определяет производную, которая в тексте обозначена через $\frac{dv}{dt}$ или $\dot{v}$.

В среде $\Omega\xi\eta\zeta$, относительно которой движется триэдр $Oxyz$, находится другой наблюдатель. Вектор $v(t)$ в каждый момент отпечатлевается

Обозначим через $\frac{d_a v}{dt}$ производную (абсолютную) вектора v относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$, который мы и здесь для краткости речи будем называть *неподвижным*; а через $\frac{dv}{dt}$ или $\dot{v}$ будем обозначать (относительную) производную вектора v по отношению к подвижному триэдру $Oxyz$. Введем теперь вспомогательный триэдр $Ox_1y_1z_1$, имеющий то же начало, что и триэдр $Oxyz$, но оси, параллельные осям *неподвижного* триэдра и обращенные каждая в ту же сторону. Каково бы ни было движение точки O относительно среды $\Omega\xi\eta\zeta$, компоненты вектора v по осям $\Omega\xi\eta\zeta$ и $Ox_1y_1z_1$ будут в каждый момент соответственно совпадать; поэтому производные вектора v относительно этих двух триэдров не будут различаться между собой. Иными словами, при вычислении производной $\frac{d_a v}{dt}$ мы можем относить ее не к триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$, а к вспомогательному триэдру $Ox_1y_1z_1$.

Если теперь представим себе вектор v приложенным в точке O то его свободный конец P будет, вообще говоря, совершать движение как относительно триэдра $Ox_1y_1z_1$, так и относительно $Oxyz$; при этом движение относительно триэдра $Ox_1y_1z_1$ можно будет рассматривать, как абсолютное — образуемое переносным движением системы $Oxyz$ относительно триэдра $Ox_1y_1z_1$ (который мы здесь будем считать неподвижным) и относительным движением точки P по отношению к $Oxyz$. Так как координатами точки P относительно триэдров $Ox_1y_1z_1$ и $Oxyz$ соответственно служат v_ξ, v_η, v_ζ и v_x, v_y, v_z, то два вектора $\frac{d_a v}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ представляют собою не что иное, как абсолютную и относительную скорость точки P. Обозначим, как обыкновенно, через $\bar{\omega}$ угловую скорость

в среде $\Omega\xi\eta\zeta$ в виде некоторого вектора $v^*(t)$, который и видит второй наблюдатель; он составляет векторы:

$$v^*(t+\Delta t) - v^*(t)$$

и

$$\frac{v^*(t+\Delta t) - v^*(t)}{\Delta t}$$

и по ним получает производную $v^*(t)$, которая в тексте отмечена через $\frac{d_a v}{dt}$. Задача заключается в том, чтобы установить зависимость между этими двумя производными по заданному движению среды $Oxyz$ относительно $\Omega\xi\eta\zeta$. Что эти производные вообще различны, ясно из следующего простого примера. Положим, что вектор v остается в среде $Oxyz$ постоянным; тогда производная $\dot{v}$ равна нулю. Положим, что среда $Oxyz$ вращается относительно $\Omega\xi\eta\zeta$ вокруг некоторой оси. Вектор $v(t)$ будет отпечатлеваться на $\Omega\xi\eta\zeta$ рядом векторов, расположенных по конической поверхности; наблюдателю, находящемуся в этой среде, он уже не будет казаться постоянным, и производная $\frac{d_a v}{dt}$ будет поэтому отлична от нуля. (*Ред.*)

триэдра $Oxyz$ относительно $Ox_1y_1z_1$, или, что то же, относительно $\Omega\xi\eta\zeta$. Тогда скорость переносного движения точки P выразится формулой:

$$v_\tau = [\overline{\omega}\,\overline{OP}] = [\overline{\omega}v],$$

так как начальные точки обоих триэдров все время совпадают, Применяя поэтому принцип относительных движений (рубр. 2). мы получим следующее соотношение между скоростями обоих движений:

$$\frac{d_a v}{dt} = \frac{dv}{dt} + [\overline{\omega}v]. \tag{13}$$

Отсюда ясно, что обе производные постоянно совпадают только в том случае, когда обращается в нуль векторное произведение $[\overline{\omega}v]$, т. е. либо когда скорость v параллельна оси вращения подвижного триэдра, либо же когда $\overline{\omega} = 0$, т. е. подвижной триэдр совершает чисто поступательное движение.

К соотношению (13) можно притти еще иным путем. Рассматривая вектор (переменный) v как ориентированный отрезок $\overline{QP}$ (это всегда возможно сделать бесчисленным множеством способов), диференцируем его относительно триэдров $\Omega\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$; мы получаем:

$$\frac{d_a v}{dt} = \frac{d_a \overline{QP}}{dt} = \frac{d_a P}{dt} - \frac{d_a Q}{dt}, \qquad \dot{v} = \dot{P} - \dot{Q};$$

а затем почленным вычитанием найдем:

$$\frac{d_a v}{dt} - v = \left(\frac{d_a P}{dt} - \dot{P}\right) - \left(\frac{d_a Q}{dt} - \dot{Q}\right).$$

Каждый из двух членов правой части, заключенных в скобки, представляет собою разность абсолютной и относительной скорости одной и той же точки, а потому совпадает с переносной скоростью этой точки. Поэтому правая часть приводится к

$$[\overline{\omega}\,\overline{OP}] - [\overline{\omega}\,\overline{OQ}] = [\overline{\omega}\,\overline{QP}] = [\overline{\omega}v],$$

и мы, таким образом, вновь приходим к формуле (13).

11. Из формулы (13) непосредственно вытекают некоторые замечательные кинематические следствия. Применяя, прежде всего, эту формулу к угловой скорости, получаем:

$$\frac{d_a\overline{\omega}}{dt} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}; \tag{14}$$

это значит: *при движении твердой системы угловая ее скорость имеет ту же производную как относительно неподвижного триэдра, так и относительно триэдра, неразрывно связанного с этой системой.*

Принимая поэтому во внимание тождество $\overline{\omega} = \omega \operatorname{vers} \omega$ и замечая, что производная скаляра, очевидно, не зависит от триэдра, к которому мы ее относим, мы получаем из соотношения (14):

$$\frac{d_a \operatorname{vers} \overline{\omega}}{dt} = \frac{d \operatorname{vers} \overline{\omega}}{dt};$$

отсюда видно, что обе эти производные обращаются в нуль совместно; это значит: *если во все время движения твердой системы ось движения имеет в этой системе неизменное направление, то она сохраняет неизменное направление также в пространстве, и обратно.*

12. Наконец, формула (13) рубр. **10** дает еще возможность доказать теорему, которую мы уже формулировали и применили в рубр. **16** предыдущей главы: *всякое равномерное винтовое движение имеет при любом центре приведения постоянные характеристические векторы относительно подвижных осей.*

В самом деле, обозначим, как обыкновенно, через $\overline{\tau}$ и $\overline{\omega}$ — составляющие скорости поступательно вращательного движения, а через $\boldsymbol{v}_0$ и $\overline{\omega}$ — соответствующие характеристические векторы (относительно любого полюса O); как видно из формулы (14), всякий раз, когда угловая скорость $\overline{\omega}$ представляет собою постоянный вектор относительно неподвижного триэдра, она остается постоянной также относительно подвижного триэдра, — и обратно.

Что касается, далее, векторов $\overline{\tau}$ и $\boldsymbol{v}_0$, то, прежде всего, согласно соотношению (16) предыдущей главы

$$\boldsymbol{v}_0 = \overline{\tau} + [\overline{\omega}\overline{\Omega O}].$$

Диференцируя это равенство по t относительно неподвижного триэдра в предположении постоянного $\overline{\omega}$, получим:

$$\frac{d_a\boldsymbol{v}_0}{dt} = \frac{d_a\overline{\tau}}{dt} + \left[\overline{\omega}\ \frac{d_a O}{dt}\right] = \frac{d_a\tau}{dt} + [\overline{\omega}\boldsymbol{v}_0].$$

Применяя, с другой стороны, к $\boldsymbol{v}_0$ соотношение (13), найдем:

$$\frac{d_a\boldsymbol{v}_0}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt} + [\overline{\omega}\,\boldsymbol{v}_0];$$

сопоставляя это с предыдущим соотношением, получаем окончательно:

$$\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt} = \frac{d_a\overline{\tau}}{dt}.$$

Это значит: если угловая скорость $\overline{\omega}$ сохраняет постоянное (векторное) значение (как обнаружено в предыдущей рубрике, безразлично, является ли она постоянной относительно подвижного или неподвижного триэдра), производные вектора $\boldsymbol{v}_0$ относительно подвижных осей и вектора $\overline{\tau}$ относительно неподвижных осей совпадают; таким образом, если один из этих векторов обращается в нуль, то уничтожается и другой вектор.